PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10. 15. Mai 1916. Redaktionsschluß für No. 11 am 20. Mai 1916. 17. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

E. Bandl, Über einen möglichen Zusammenhang gewisser Witterungsvorgänge mit der radioaktiven Emanation des Erdbodens. S. 193.

H. J. van Leeuwen, Die Instabilität des Bohr-Debyeschen Wasserstoff-Moleküls und die Dispersion von Wasserstoff. S. 196.

M. Wolfke, Zum Bohrschen Atommodell. S. 198.

H. Hörig, Ein fahrbarer Laboratoriumstisch für die Gaedesche Molekularluftpumpe. S. 200.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

C. Runge, Über die Dimensionen physikalischer Größen. S. 202.

Besprechungen:

M. Born, Dynamik der Kristallgitter. S. 212.

Handbuch der Radiologie. III. S. 213.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. VIII, 3. S. 215.

M. Abraham, Theorie der Elektrizität. II. S. 216.

Personalien. S. 216.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über einen möglichen Zusammenhang gewisser Witterungsvorgänge mit der radioaktiven Emanation des Erdbodens.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von E. Bandl.

Die im Gebirge auf Bergkuppen, längs eines Höhenzuges, in einer Paßenge usw. auftretenden umfangreichen Wolkenbildungen sind eine allgemein beobachtete und bekannte Erscheinung, die auf Luftströmungen bzw. lokale Temperaturänderungen in der Atmosphäre zurückgeführt wird. Naturgemäß wirkt bei der Entstehung und Gestaltung eines derartigen Gewölkes stets auch die besondere Form und Gliederung des betreffenden Gebirges, die Beschaffenheit und Richtung der Täler und Ähnliches mit.

Einen ganz anderen Eindruck als die vorerwähnte Bewölkungsart macht jedoch jenes, verhältnismäßig kleine, Wolken- oder Nebelgebilde, das in manchen Gebirgsgegenden unter bestimmten Verhältnissen an einer und stets derselben engumgrenzten Stelle eines Berges, bei einer steilen Felswand, an einem Grat oder in einer Einsattelung entsteht und dabei entweder in einiger Höhe über jener charakteristischen Gegend fast unbeweglich schwebt oder aber unmittelbar am Gebirge anhaftet. Die Dauer dieser Wolkenerscheinung schwankt etwa zwischen 5 und 30 Minuten; selten ist sie länger.

Nach ihrem ganzen Verhalten scheinen solche Wolken mit Luftströmungen in keinem unbedingten bzw. ausschließlichen Zusammenhang zu stehen; sie zeigen sich eher häufiger bei relativer Windstille; andererseits können sie auch während mäßiger Winde vorkommen, ohne daß sie jedoch auf lokale Winddrehungen irgendwie besonders reagieren. Ebensowenig dürften auftretende Temperaturdifferenzen an sich eine ausschlaggebende Rolle spielen, zumal jene Wolkengebilde meistens bei konstanter Temperatur, und zwar in gleicher Weise sowohl in der warmen als auch in der kalten Jahreszeit vorkommen.

Nur ein Vorgang verläuft mit dem Entstehen genannter Wolkenart nahezu immer parallel, nämlich die Abnahme des atmosphärischen Druckes. Nicht selten vermag man schon aus dem Auftauchen besagter Wolke allein auf ein Sinken des Luftdruckes zu schließen.

Im Laufe mehrjähriger Beobachtungen habe ich konstatiert, daß das Erscheinen einer solchen Wolke an dem betreffenden charakteristischen Punkt in der jeweiligen Gebirgsgegend mit auffallender Sicherheit, und zwar viel verläßlicher als der Rückgang des Barometerstandes für sich, einen nahen Witterungsumschlag oder andere ähnliche meteorologische Ereignisse ankündigt.

Zeigt sich während einer Reihe konstant schöner und klarer Tage in einiger Höhe über einer solchen charakteristischen Stelle eine kleine dunkel gefärbte Flockenwolke, eventuell auch nur für wenige Minuten, so tritt mit fast absoluter Bestimmtheit nach 12 bis 24 Stunden feuchtwarmer, von starker Bewölkung begleiteter Wind, ein Gewitter usw. ein.

Entsteht ein derartiges Gebilde über oder an der charakteristischen Stelle zu einer Zeit, wo schon eine ziemlich umfangreiche, höhere Bewölkung vorhanden ist, so kann dies als sicheres Vorzeichen eines stärkeren Regens angesehen werden[1]). Besonders auffallend ist eine solche Erscheinung dann, wenn z. B. die be-

1) Vereinzelt wird eine solche Wetterprognose aus dem Erscheinen einer Wolke an einer bestimmten Stelle, sogar von der ortsansässigen, bäuerlichen Bevölkerung selbst aufgestellt.

treffende charakteristische Stelle eine weit geringere Höhe aufweist als die umliegenden Berge, deren Spitzen eventuell alle noch ganz ohne Wolken sind, während an besagter Stelle schon ein Nebel haftet.

Durch genauere, wenn auch noch nicht streng systematische Beobachtungen gewann ich immer mehr den Eindruck, daß die geschilderte Wolken- oder Nebelbildung mit dem einzelnen charakteristischen Punkte des Gebirges in einer ganz speziellen Beziehung stehen müsse, als ob dieser geradezu einen unmittelbaren, bestimmenden Einfluß auf das Entstehen der Wolke hätte. Namentlich ein unbewegliches Schweben solcher Gebilde in einigem Abstand über der charakteristischen Stelle erweckt den Anschein, wie wenn von letzterer irgendwelche unbekannte, die Wolke erzeugende und gleichzeitig festhaltende Kräfte ausgingen.

Schon vor längerer Zeit dachte ich, ob man die Erscheinung nicht etwa auf eine Art elektrischer Ladungswirkung oder Ionisierung seitens des betreffenden Gebirgsteiles zurückführen könnte; ich fand jedoch keine Gründe, welche diese spekulative Annahme irgendwie sonst gerechtfertigt hätten.

Erst vor kurzem wurde ich durch eine Schrift von H. Sieveking[1]) auf eine Tatsache aufmerksam gemacht, die, wie ich glaube, für obige Frage die einfachste Lösung gibt. Es ist dies die durch ein Sinken des äußeren Luftdruckes bewirkte Steigerung der radioaktiven Ausströmungen des Erdbodens, welche, wenn sie entsprechend stark ist, durch Ionisationswirkung in der Atmosphäre Kondensation von Wasserdampf und damit Wolken erzeugen dürfte.

Auf Grund von vorläufig bloß allgemeiner Orientierungen habe ich inzwischen festgestellt, daß alle jene Stellen, die ich in den letzten Jahren als für besagte Wolkenbildung charakteristisch kennen lernte, sich in Gegenden befinden, welche die typischen Merkmale tektonischer Einsturz- oder Spaltengebiete aufweisen. Ist der Erdboden bzw. ein Hohlraum in der Erde in dem betreffenden Gebiete durch einen größeren Gehalt an radioaktiver Emanation ausgezeichnet, so wird durch diese Emanation zunächst die in den Höhlungen und Spalten befindliche Luft teilweise ionisiert sein.

Wenn nun durch ein Sinken des äußeren Luftdruckes aus solchen Poren der Erde die einen Überdruck besitzende Luft herausgetrieben wird, so muß sie auch einen Teil der angesammelten radioaktiven Emanation in die freie Atmosphäre mitnehmen. Mögen auch die Erdspalten selbst durch Gestein, Schotter oder selbst lockeren Humus verdeckt sein, immerhin wird jene mit Emanation vermischte Luft Wege finden, durch die sie in Form von Gasströmen emporsteigen kann; die mitgeführte Emanation wird hierbei weiter ionisierend wirken.

Dort, wo solche aufsteigende Gasströme in der freien Luft auf Wasserdampf stoßen, erzeugen sie durch die in ihnen enthaltenen Ionen Kondensation, d. h. Wolken- oder Nebelbildung. Je nach der relativen Höhe, in welcher eine Wasserdampfschichte vorhanden ist bzw. am Gebirge vorbeistreicht, schwebt dann die Wolke in einem bestimmten Abstand über der charakteristischen Stelle oder sie haftet als Nebel selbst am Berge.

Solche Kondensationserscheinungen werden um so sicherer eintreten, je rascher der Luftdruck sinkt, weil dabei um so mehr Emanation und Ionen auf einmal aus der Erde ausgestoßen werden.

Meine bisherigen Beobachtungen bestätigen im allgemeinen diese Erwägung.

Die empfindliche Reaktion des Wasserdampfes auf die Anwesenheit von Ionen gibt, wie ich glaube, auch eine einfache Erklärung der Tatsache, warum jene Wolkengebilde an den charakteristischen Punkten zumeist um so vieles früher zustandekommen als die mit der Luftdruckabnahme und ähnlichen gröberen, atmosphärischen Vorgängen in näherer Beziehung stehende allgemeine Bewölkung.

Es ist übrigens vielleicht nicht völlig ausgeschlossen, daß auch an der Bildung allgemeiner Bewölkung eine, wenngleich nur schwache Emanations- und Ionenausströmung seitens jenes ganzen Erdoberflächenteiles, auf welchen sich die jeweilige Abnahme des atmosphärischen Druckes erstreckt, bis zu einem gewissen Maße mitwirken könnte.

Eine von mir gemachte konkrete Feststellung, wonach in einer bestimmten Gebirgsgegend in der Nähe eines durch viele Felsenspalten charakterisierten, vor Witterungsänderungen stets jene Wolkenbildung aufweisenden Punktes die ganze Umgebung, die zudem als Einsturzgebiet bekannt ist, sich durch außerordentlich reiche Niederschläge auszeichnet[1]), sowie die gleiche Eigenschaft ausgedehnter Einsturzgebiete in anderen Gegenden, bestärkt mich in der Vermutung, daß das Ausströmen größerer Emanationsmengen aus der Erde nicht nur jene gewissen Wolken erzeugen, sondern

1) Moderne Probleme der Physik, Vorträge von Dr. H. Sieveking. Braunschweig, Verlag Vieweg 1914.

1) Einmal fielen dort in einer Nacht 152 mm Regen, gegen 15 mm in den angrenzenden Gebieten.

auch das Zustandekommen von Niederschlägen wesentlich begünstigen dürfte.

Eventuell lassen sich auf ähnliche Weise die starken Regengüsse die nach größeren tektonischen Erdbeben bisweilen auftreten sollen, mit der Kondensationswirkung bedeutender Mengen ionisierter Luft, welche durch Verschiebungen oder Senkungen der Erdrinde aus dieser herausgepreßt werden, in Verbindung bringen.

Schließlich kann man vielleicht sogar gewisse Gewittererscheinungen, die sich ebenfalls bei tektonischen Beben mitunter zeigen, ferner die häufigen Entladungen auf den verschiedenen als besonders gewittergefährlich bekannten Berghöhen zum Teil auf einen, auch von der Erdbodenemanation herrührenden elektrischen Einfluß zurückführen.

So dürften z. B. längs eines bestimmten Gebirgskammes, von dessen außergewöhnlicher Gewittergefährlichkeit ich mich vor mehreren Jahren selbst überzeugen konnte, wohl sicherlich tiefe Spalten in der Erdrinde verlaufen, aus denen bei sinkendem Luftdruck größere Mengen radioaktiver Emanation emporsteigen. Im einem Gebirgspanorama von mehr als 100 km Ausdehnung habe ich einmal bei klarster Witterung gerade nur in der Nähe besagten Kammes eine Bewölkung, und zwar jener charakteristischen Art, wahrgenommen.

Ein in einer ganz anderen Gegend befindliches Bergmassiv, das ohne Zweifel viele Spalten und Einsturzstellen besitzen dürfte, und an dem ich ebenfalls einigemal bei sonst vollkommen wolkenlosem Wetter jene oben geschilderten feststehenden Wolken gesehen habe, wird von Ortskundigen desgleichen als sehr gewittergefährlich bezeichnet.

Ich will nicht absolut ausschließen, daß der aus dem Erdinnern ausströmenden radioaktiven Emanation und ionisierten Luft vielleicht nicht ein derart weitgehender Einfluß zukommt, wie ich aus den oben angeführten Beobachtungen abzuleiten versuchte.

Es ist eventuell möglich, daß schon das intensive Ausströmen der Luft an sich aus gewissen, nicht zu sehr verschütteten Erdspalten bei sinkendem atmosphärischen Druck infolge der Aufwärtsbewegung sowie Ausdehnung eine Abkühlung und damit Kondensation des Wasserdampfes erzeugt, wobei vielleicht auch die Temperaturdifferenz zwischen der Luft der freien Atmosphäre und jener im Erdinnern (die sich allerdings mit dem Wechsel der Jahreszeit umkehrt) mitwirken könnte.

Es soll nicht ganz in Abrede gestellt werden, daß eventuell doch auch irgendwelche lokale, schwer nachweisbare Winde bei dem Zustandekommen jener charakteristischen Wolken eine besondere Rolle spielen.

Endlich wäre allenfalls zu erwägen, ob nicht auch eine durch ultraviolette Sonnenstrahlen in der freien Atmosphäre selbst erzeugte Ionisierung oder lokale elektrische Einflüsse hierbei mitwirken.

Es ist möglich, sogar sehr wahrscheinlich, daß eben mehrere verschiedene und vielleicht ziemlich komplizierte Vorgänge zusammenwirken müssen, damit jene Wolkenbildung entstehe.

Auf jeden Fall aber glaube ich, daß es sich lohnen dürfte, die Frage des Einflusses der radioaktiven Bodenemanation auf gewisse Witterungserscheinungen, sowie auch im allgemeinen das Ausströmen von Luft aus dem Erdinnern bei sinkendem atmosphärischen Druck durch ausgedehnte systematische und statistische Beobachtungen bzw. Messungen zu prüfen. Zu einer Sammlung derartigen Materials anzuregen, soll der Hauptzweck vorstehender Mitteilung sein.

Die genauen topographischen Angaben über die oben beschriebenen Wahrnehmungen werde ich aus begreiflichen Gründen erst bei Wiedereintritt normaler Zeiten veröffentlichen können.

Zusammenfassung.

1. In manchen Gebirgsgegenden zeigen sich unter gewissen Verhältnissen an, bzw. in der Nähe einer und stets derselben Stelle eines Berges kleine Wolken- oder Nebelgebilde, die nach ihren besonderen Eigenschaften mit den jeweiligen herrschenden Winden oder mit den lokalen Temperaturverhältnissen nicht in unbedingtem Zusammenhang zu stehen scheinen.

2. Das Auftreten dieser Wolken ist fast immer von einem Sinken des Luftdruckes begleitet und kündigt, nach empirischen Beobachtungen, mit auffallender Sicherheit das Nahen eines Witterungsumschlages, einen kommenden feuchten Wind mit Bewölkung oder Regen an.

3. Das eigentümliche Verhalten solcher Wolkengebilde macht den Eindruck, wie wenn zwischen der Stelle, wo die Wolke sich zeigt, und dieser letzteren selbst ganz besondere Beziehungen bestünden.

Erwägt man die Tatsache, daß das Sinken des atmosphärischen Druckes unter anderem auch eine Steigerung des Ausströmens radioaktiver Emanation und ionisierter Luft aus den Poren der Erde zur Folge hat, und berücksichtigt man ferner den Umstand, daß die Umgebung jener Stellen im Gebirge, wo oben genannte Wolken zustande kommen, in der Regel den Typus tektonischer Einsturzgebiete aufweisen, so kann man annehmen, daß ein derartiges

Aufsteigen von Emanation und ionisierter Luft eine Kondensation der in der freien Atmosphäre befindlichen Wasserdämpfe und damit jene charakteristischen Wolkengebilde erzeugt.

4. Es ist vielleicht die Vermutung zulässig, daß die ionisierende Wirkung der radioaktiven Bodenemanation möglicherweise auch bei dem Zustandekommen allgemeiner Bewölkung, sowie bei dem Entstehen starker Niederschläge mitbeteiligt ist, ferner daß eventuell gewisse durch Gewitter besonders ausgezeichnete Berge diese Eigenschaft zum Teil dem elektrischen Einfluß derselben Bodenemanation verdanken.

5. Obgleich vielleicht die Wirkung der radioaktiven Emanation des Erdbodens tatsächlich nicht eine so weitgehende bzw. vielseitige ist, wie mit den vorstehenden Darlegungen gezeigt werden sollte, so dürfte eine eingehende statistische Prüfung der Frage immerhin wünschenswert erscheinen.

Im Felde, März 1916.

(Eingegangen 9. April 1916.)

Die Instabilität des Bohr-Debyeschen Wasserstoff-Moleküls und die Dispersion von Wasserstoff[1]).

Von Frl. H. J. van Leeuwen.

§ 1. Instabilität nach der klassischen Mechanik, richtige Dispersion. Unter Zugrundelegung des Bohrschen Wasserstoffmoleküls[2]) (zwei Kerne mit Ladung e auf der „Molekülachse", zwei im Äquator, einander gegenüber mit Winkelgeschwindigkeit ω drehende Elektronen, mit Ladung $-e$ und Masse m) hat Debye[3]) eine Dispersionsformel für Wasserstoff abgeleitet, rechnend nach den Vorschriften der klassischen Mechanik. Diese Dispersionsformel stimmt sehr gut mit der Erfahrung, wenn man den bekannten Wert für das Verhältnis von Ladung zu Masse der Elektronen und für das Moment der Bewegungsgröße $\left(\frac{h}{2\pi}\right)$ einsetzt. Gegen das Debyesche Verfahren muß aber eingewendet werden, daß zwei von den fünf Gliedern seiner Dispersionsformel labilen Bewegungsweisen des Moleküls entsprechen. Eine einfache Rechnung ergibt nämlich, daß die Hauptschwingungen des Systems (wenn man mit Debye die beiden Kerne mit Rücksicht auf ihre relativ so große Masse als unbeweglich annimmt) sind:

a) beide Elektronen bewegen sich parallel der Achse des Moleküls und haben immer entgegengesetzt gleiche Verrückungen, die Frequenz ist $n_a = \pm 0{,}27\,\omega$,

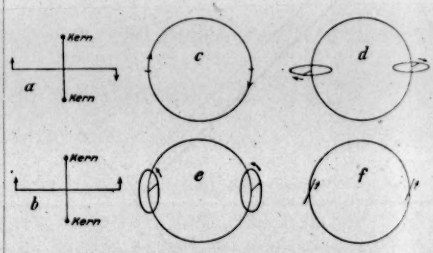
b) beide Elektronen haben gleiche Verrückungen, gleichgerichtet, parallel der Molekülachse, die Frequenz ist $n_b = \pm 0{,}556\,\omega$,

c) beide Elektronen sind über den Kreis im selben Sinne etwas verschoben, dieser Störung gegenüber ist das System natürlich indifferent, $n_c = 0$,

d) beide Elektronen durchlaufen gleiche Ellipsen von derselben Orientierung, die Radiusvektoren sind entgegengesetzt gerichtet, die Frequenz ist $n_d = \pm 1{,}47\,\omega$,

e) beide Elektronen durchlaufen wieder kongruente Ellipsen von gleicher Orientierung, aber mit gleichgerichteten Radiusvektoren, $n_e = +1{,}412\,\omega$,

f) die Verrückungen beider Elektronen sind gleichgerichtet, die Frequenz ist $n_f = \pm 0{,}551\,i\omega$, mit der Frequenz $-0{,}551\,i\omega$ beschreiben die Elektronen die in der Figur gezeichneten geraden Linien, oder mit der Frequenz $+0{,}551\,i\omega$ die damit in bezug auf den Radius im Gleichgewichtszustande symmetrischen, dabei wachsen die Verrückungen exponentiell. Diese Bewegung ist also instabil[1]). Auf alle diese Bewegungen superponiert sich noch die gleichmäßige Rotation.



Bei den Bewegungen a, c, d hat das Molekül kein resultierendes elektrisches Moment, eine äußere elektrische Kraft kann diese Bewegungen nicht anregen und sie liefern also auch keinen Beitrag zur Dispersion. Anders ist es mit den Bewegungen b, e, f. Betrachten wir die Dispersionsformel von Debye in der Form:

1) Zusammenfassung der Resultate eines unter dem Titel: „Eenige opmerkingen over het waterstofmolekuul van Bohr-Debye" in den Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam Dl **24**, 1047, 1915 erschienenen Artikels, auf den für alle hierher gehörigen Rechnungen verwiesen wird.

2) N. Bohr, On the Constitution of Atoms and Molecules III, Phil. Mag. (6) **26**, 857, 1913.

3) P. Debye, Die Konstitution des Wasserstoffmoleküls. Sitz.-Ber. München 1915, 1.

1) Die Instabilität von Systemen, aus zwei Kernen bestehend mit zwischen ihnen rotierendem Elektronenring ist schon von Bohr bemerkt worden, s. N. Bohr, loc. cit.

$$n^2-1=\frac{\mu_1}{1-\left(\frac{s}{n_b}\right)^2}+\frac{\mu_2}{1-\left(\frac{s}{n_e-\omega}\right)^2}+$$
$$+\frac{\mu_3}{1-\left(\frac{s}{n_e+\omega}\right)^2}+\frac{\mu_4}{\left(\frac{n_f i}{\omega}\right)^2+\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2}+$$
$$+\frac{\mu_5}{\left(\frac{n_f i}{\omega}\right)^2+\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2}.$$

in der n der Brechungskoeffizient ist,

die μ die Debyeschen Zähler sind, auf deren nähere Struktur es jetzt nicht ankommt, und s die Frequenz des durchgehenden Lichtbündels ist.

Wir überlegen, daß die periodische elektrische Kraft, die proportional zu $\cos(st+p)$ ist, parallel der Molekülachse eine Komponente gleichfalls mit der Periode $\frac{2\pi}{s}$ hat, parallel den mitrotierenden Achsen im Äquator aber Komponenten proportional zu $\cos(st+p)\cos(\omega t+q)$, die sich aufspalten lassen in Glieder mit Perioden $\frac{2\pi}{s-\omega}$ und $\frac{2\pi}{s+\omega}$.

Das erste Glied deutet also auf Resonanz für $s=n_b$, das zweite und dritte für $s\mp\omega=n_e$, das vierte und fünfte für $s\mp\omega=n_f=0{,}55\,i\omega$, so daß das Pluszeichen zwischen den Quadraten der reellen Größen $\frac{n_f i}{\omega}$ und $1\mp\frac{s}{\omega}$ in den letzten zwei Nennern der Dispersionsformel die Instabilität des Moleküls verrät[1]).

(Hierauf machte mich Herr Professor Lorentz aufmerksam.)

Steht das Bohr-Debyesche Wasserstoffmolekül unter der Einwirkung einer allzeit ungestörten periodischen elektrischen Kraft (siehe das übliche Verfahren zur Berechnung von Dispersionsformeln), so führt es erzwungene Schwingungen von derselben Periode aus und seine Instabilität tritt dabei noch nicht in Erscheinung. Aber sobald die einfallende Lichtbewegung sich ändert, z. B. aufhört, macht sich die Instabilität sofort geltend: denn im letzten Augenblick sind im Molekül solche Konfigurationen oder Bewegungen der Elektronen vorhanden, daß sich nun die instabile Bewegung (f) frei entwickelt und das Molekül zerstört.

§ 2. Stabilisierung durch Einführung kinematischer Bedingungen liefert mit der Erfahrung schlecht stimmende Dispersion. Man kann sich fragen, ob es möglich ist, das System kinematisch so zu beschränken, daß einerseits die instabile Bewegung f ausgeschlossen wird, andererseits die Dispersionsformel noch befriedigende Übereinstimmung mit der Erfahrung behält. Die Bewegung f allein auszuschließen, ist wohl nicht leicht möglich; denn schreibt man für den Schwerpunkt der Elektronen eine Bahn von der Form e vor, so ist die Homogenität der Gleichungen verloren und man kann die erzwungenen Schwingungen nicht mehr auf die freien superponieren. Wir wollen noch zwei andere vergebliche Versuche in ähnlicher Richtung besprechen.

1. Die Bahn des Schwerpunktes der Elektronen ist die Molekülachse. Man bekommt eine Dispersionsformel:

$$n^2-1=4\pi N\frac{e^2}{m\omega^2}\left[\frac{2{,}153}{1-\left(\frac{s}{0{,}556\,\omega}\right)^2}\right],$$

in der N die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit ist.

Nach Einsetzen der Werte:

$$Ne=1{,}289\cdot 10^{10},\ \frac{e}{m}=5{,}28\cdot 10^{17},$$
$$\omega=\frac{(3\sqrt{3}-1)^2\pi^3}{2}\cdot\frac{me^4}{h^3},\ e=4{,}69\cdot 10^{-10},$$
$$h=6{,}55\cdot 10^{-27},$$

erhält man:

$$n-1=0{,}53\cdot 10^{-4}+0{,}98\cdot 10^{-37}s^2,$$

während Kochs Beobachtungen lieferten:

$$n-1=1{,}361\cdot 10^{-4}+2{,}908\cdot 10^{-37}s^2,$$

die von C. und M. Cuthberson:

$$n-1=1{,}362\cdot 10^{-4}+2{,}780\cdot 10^{-37}s^2,$$

(und schließlich Debyes Rechnungen:

$$n-1=1{,}58\cdot 10^{-4}+3{,}55\cdot 10^{-37}s^2).$$

Die hier eingeführte Bedingung gibt also einen viel zu kleinen Brechungsindex.

2. Die Elektronen sind nur über einem Kreis mit vorgeschriebenem Radius beweglich; drehen sie in allen Molekülen mit derselben Geschwindigkeit rM über einen Kreis mit gleichem Radius r, so wird die Dispersionsformel:

1) Vgl. als einfaches System ohne Rotation eins, bestehend aus einem materiellen Punkte, abgestoßen mit einer Kraft, proportional zu der Entfernung von dem Koordinatenursprung, mitschwingend mit einer periodischen Kraft: $a\cos st$, also $mx=fx+a\cos st$, f ist positiv, $n=\sqrt{\frac{f}{m}}\cdot i$ ist die Frequenz der freien Schwingungen, $x=\frac{-a\cos st}{m[s^2+(ni)^2]}$ die Verrückung bei den erzwungenen Schwingungen.

$$n^2 - 1 = \frac{8\pi N e^2}{3m}\left[\frac{1}{\frac{e^2}{4mr^3} - M^2} + \frac{1}{\frac{3\sqrt{3}e^2}{16mr^3}} + s^2\left(\frac{\frac{e^2}{4mr^3} + 3M^2}{\left(\frac{e^2}{4mr^3} - M^2\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{3}e^2}{16mr^3}\right)^2}\right)\right].$$

Trägt man den Wert für $\frac{e^2}{m}$ ein, so wären noch die Werte von r und M, zwischen denen nur die Beziehung: $mr^2M = \frac{h}{2\pi}$ bestehen muß, nötig, um die Formel mit den empirischen vergleichen zu können. Diese r und M kennen wir aber nicht. Darum rechnen wir umgekehrt und fragen, ob die Werte von r und M, welche die Formel in die Kochsche überführen, der Bedingung $mr^2M = \frac{h}{2\pi}$ genügen. Dies ist nicht der Fall, man findet $mr^2M = \frac{h}{5{,}1}$ also 5,1 statt $2\pi = 6{,}28$.

§ 3. Bei Stabilität nach dem Bohrschen Kriterium besteht vorläufig unbekannte Dispersion. Mehr wünschenswert wäre es, die Beschränkung in der Bewegungsfreiheit der Elektronen in Übereinstimmung zu bringen mit der von Bohr für die Atome eingeführten, auf der die Ableitung der Balmerschen Formel beruht, nämlich daß für jedes Elektron die Beziehung:

$$mr^2\dot{\vartheta} = \frac{h}{2\pi} \qquad (1)$$

(r und ϑ sind Polkoordinaten in dem Äquator) auch noch für die gestörte Bewegung erhalten bleiben soll.

Zur Untersuchung der Stabilität wenden wir das von Bohr vorgeschlagene Kriterium, als Ersatz für die Forderungen der klassischen Mechanik, auf dieses Wasserstoffmolekül an. Dieses Kriterium lautet: Das System ist stabil, wenn die Totalenergie des Systems bei der betrachteten Bewegung ein Minimum ist, allen Störungen gegenüber, bei denen das Moment der Bewegungsgröße für jedes Elektron unverändert bleibt.

Wir wollen hiernach die Stabilität des Wasserstoffmoleküls untersuchen, wie Föppl[1]) es für die Atome (Systeme mit einem Kern) gemacht hat. Wir berechnen also die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie; diese Summe läßt sich nach Ersetzung von $\dot{\vartheta}_1$ und $\dot{\vartheta}_2$ durch $\frac{h}{2\pi m r_1^2}$ und $\frac{h}{2\pi m r_2^2}$ (die Indizes unterscheiden die Elektronen) ausdrücken in deren Wert für die ungestörte Bewegung, vermehrt mit einer Anzahl Glieder, die Quadrate der Größen, welche die Abweichungen messen, enthalten, mit positiven Koeffizienten[1]). Das Bohr-Debyesche Wasserstoffmolekül genügt also der Stabilitätsbedingung von Bohr.

Will man aber nun die diesem Standpunkte entsprechende Dispersionsformel berechnen, so stößt man auf folgende Schwierigkeit: Man muß dann nämlich berechnen, wie ein System, dem die Bohrsche Momentenrelation (1) auferlegt ist, unter dem Einflusse von äußeren Kräften schwingt, die ohne die Relation jene Momente verändern würden. Die Mechanik lehrt uns noch nicht, wie die Bewegungsgleichungen eines solchen Systems lauten, denn die Bohrschen Momentenrelationen (1) erinnern wohl an linear homogene kinematische Gleichungen zwischen Geschwindigkeiten (rollen ohne gleiten), aber sie sind nicht homogen und geben dementsprechend (im Gegensatz zu diesen kinematischen Gleichungen) auch keine Relationen zwischen unendlich kleinen Verschiebungen. Man sieht: es bedürfte hier noch neuer Festsetzungen über die Bewegungsgleichungen des Systems und so lange die nicht getroffen sind, läßt sich über die entsprechende Dispersion nichts sagen.

Gerne spreche ich auch hier Herrn Professor Lorentz gegenüber meinen besten Dank aus für die Anregung zu dieser Arbeit.

1) Höhere Glieder als die quadratischen werden vernachlässigt.

(Eingegangen 3. April 1916.)

1) L. Föppl, Über die Stabilität des Bohrschen Atommodelles, diese Zeitschr. **15**, 707, 1914.

Zum Bohrschen Atommodell.

Von M. Wolfke.

Vor kurzem habe ich gezeigt[1]), daß die Anwendung der Bohrschen Strahlungsannahmen auf das Debyesche Wasserstoffmolekül zu der Balmerschen Serie führt. Der Ausdruck für die Balmersche Konstante, der bei dem Bohrschen Atommodell[2])

$$2 \cdot \frac{\pi^2 e^4 m}{h^3} \qquad (1)$$

ist, nimmt dabei für das Molekül folgende Form an:

1) M. Wolfke, diese Zeitschr. **17**, 71, 1916.
2) N. Bohr, Phil. Mag. (6) **26**, 1, 1913.

$$\frac{(3\sqrt{3}-1)^2}{8}\cdot\frac{\pi^2 e^4 m}{h^3}=2{,}2\cdot\frac{\pi^2 e^4 m}{h^3}, \quad (2)$$

wo e die Ladung des Elektrons, m die Masse des Elektrons und h das Plancksche Wirkungsquantum bedeuten.

Da die Frage nach den Trägern der Serienlinien von prinzipieller Bedeutung ist, so möchte ich in dieser Abhandlung genau untersuchen, welcher von den beiden Ausdrücken (1) und (2) besser mit den neuesten experimentellen Daten übereinstimmt.

Setzt man in die beiden Formeln (1) und (2) die von Riecke benutzten Werte ein[1]), so fällt das Resultat entschieden zugunsten des Moleküls aus[2]). Dieser Schluß ist jedoch durchaus nicht entscheidend, da ein kleiner Zuwachs des unsicheren Wertes von e das Gegenteil ergeben würde. Daraus geht hervor, daß die beiden Ausdrücke in der Form (1) und (2) zur genauen Prüfung dieser Frage nicht geeignet sind. Ich werde jedoch hier zeigen, daß bei einer entsprechenden Umformung der beiden Ausdrücke eine sichere Entscheidung möglich ist.

Vor allem möchte ich darauf hinweisen, daß die Bohrschen Strahlungshypothesen auf dem Boden der Quantentheorie aufgebaut sind und daß man deshalb, wenn man konsequent bleiben will, die Beziehung zwischen dem Wirkungsquantum und dem elektrischen Elementarquantum, die als direktes Ergebnis aus dem Planckschen Strahlungsgesetz folgt[3]), nicht unbeachtet lassen darf, und die beiden Größen h und e als voneinander abhängig betrachten muß.

Wir wollen im folgenden diese Beziehung in den Ausdrücken (1) und (2) einführen.

Bezeichnen wir mit k die Boltzmannsche Konstante, mit R die Gaskonstante und mit E die Ladung eines Grammäquivalentes, so ist:

$$e=\frac{kE}{R}. \quad (3)$$

Die Quantentheorie liefert uns folgende Beziehung[4]):

$$k^4=\frac{a c^3 h^3}{48\pi\alpha}, \quad (4)$$

wo a die Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit und

$$\alpha=1{,}0823$$

ist. Die Formeln (3) und (4) ergeben:

$$e^4=\frac{a c^3 h^3 E^4}{48\pi\alpha R^4}. \quad (5)$$

Setzt man den Ausdruck (5) in die Formeln (1) und (2) ein, so folgt für das Atom:

$$2\cdot\frac{\pi c^3}{48\alpha}\cdot\frac{E^4 am}{R^4}=\frac{\pi c^3}{24\alpha}\cdot\frac{E^4 ae}{R^4 e/m},$$

und für das Molekül:

$$2{,}2\cdot\frac{\pi c^3}{48\alpha}\cdot\frac{E^4 am}{R^4}=1{,}1\cdot\frac{\pi c^3}{24\alpha}\cdot\frac{E^4 ae}{R^4 e/m}.$$

Der in den obigen Formeln gemeinsame Faktor

$$\frac{\pi c^3}{24\alpha}\cdot\frac{E^4 ae}{R^4 e/m} \quad (6)$$

eignet sich bedeutend besser zu einem quantitativen Vergleich, als die beiden Formeln (1) und (2), da er voneinander unabhängige Größen enthält, und die vierte Potenz nur bei den experimentell sehr genau bestimmten Größen E und R steht.

Um zu einer sicheren Entscheidung zu gelangen, wollen wir aus den bekannten experimentellen Daten auf Grund des Ausdruckes (6) den unteren und den oberen Grenzwert für die Balmersche Konstante sowohl für das Atom, als auch für das Molekül berechnen. Zu diesem Zweck müssen wir auf Grund der Ergebnisse der neuesten Messungen für jede der im Ausdruck (6) vorkommenden Größen die zulässigen Grenzwerte bestimmen. Wir werden dabei alle Größen im absoluten Maßsystem ausdrücken.

Die Werte von E und R sind sehr genau bekannt. Als Grenzwerte für E setzen wir:

$$2{,}894\cdot 10^{14} \text{ und } 2{,}896\cdot 10^{14}$$

und für R:

$$8{,}31\cdot 10^{7} \text{ und } 8{,}32\cdot 10^{7}.$$

Was den Wert von e/m betrifft, so stehen die Resultate der neuen Messungen in sehr guter Übereinstimmung miteinander, so daß auch diese Größe in ziemlich enge Grenzen eingeschlossen werden kann[1]). Wir wählen als Grenzwerte:

$$5{,}289\cdot 10^{17} \text{ (Bucherer 1908)}$$

und

$$5{,}328\cdot 10^{17} \text{ (Classen 1908)}.$$

Der Wert von e ist weniger sicher und deshalb müssen wir für diese Größe möglichst weite Grenzen festsetzen. Jedenfalls läßt sich wohl mit Sicherheit sagen, daß der Wert von e zwischen

1) E. Riecke, diese Zeitschr. **16**, 222, 1915.
2) M. Wolfke, l. c.
3) M. Planck, Vorles. üb. d. Theorie der Wärmestrahlung. 2. Aufl., S. 165—167, 1913.
4) M. Planck, l. c. Formel (287) u. (288), S. 165.

1) Vgl. R. Seeliger, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **9**, 28, 1912; A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. (4) **37**, 597, 1912 u. Cl. Schaefer, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 935, 1913.

$$4{,}65 \cdot 10^{-10}$$ (Rutherford u. Geiger)

und

$$4{,}85 \cdot 10^{-10}$$

liegen muß[1]).

Auch die Resultate der Messungen der Strahlungskonstante a gehen weit auseinander[2]), so daß wir folgende zwei weit voneinander liegende Grenzwerte setzen müssen:

$7{,}41 \cdot 10^{-15}$ (kleiner als der von Westphal 1913)

und

$$8{,}20 \cdot 10^{-15}$$ (Puccianti 1912).

Um die untere Grenze des Ausdruckes (6) zu berechnen, setzen wir im Zähler die unteren und im Nenner die oberen Grenzwerte der einzelnen Größen ein. Für die obere Grenze gilt das Gegenteil.

Die Rechnung ergibt alsdann, daß nach der Bohrschen Theorie die Balmersche Konstante für das Wasserstoffatom zwischen den Werten

$$3{,}09 \cdot 10^{15} \text{ und } 3{,}62 \cdot 10^{15}$$

und für das Wasserstoffmolekül zwischen

$$3{,}40 \cdot 10^{15} \text{ und } 3{,}98 \cdot 10^{15}$$

liegen muß.

Der experimentelle Wert der Balmerschen Konstante ist

$$3{,}29 \cdot 10^{15}.$$

Wir sehen also, daß der experimentelle Wert durchaus in dem von der Theorie für das Atom geforderten Intervall liegt. Die Werte, die dem Molekül entsprechen, sind dagegen viel zu groß, so daß sogar der kleinste mehr als um 3 Proz. zu groß ist.

Aus dieser Betrachtung folgt mit Sicherheit, daß der Bohrsche Ausdruck für die Balmersche Konstante mit den heute bekannten zulässigen experimentellen Daten in vorzüglicher Übereinstimmung steht.

Das Molekül dagegen gibt durchwegs zu große Werte, deren Abweichungen sicher außerhalb der Fehlergrenzen der Beobachtungen liegen.

Das entgegengesetzte Resultat, zu dem ich in meiner früheren Mitteilung gelangte, erklärt sich dadurch, daß ich ähnlich wie Riecke und andere den Zusammenhang zwischen e und h bei der Rechnung nicht berücksichtigt habe.

Betrachtet man den Bohrschen Ausdruck für die Balmersche Konstante als genau gültig, dann läßt sich aus ihm und dem experimentellen Wert der Balmerschen Konstante die Strahlungskonstante berechnen. Setzen wir zu diesem Zweck:

$E = 2{,}895 \cdot 10^{11}$, $R = 8{,}315 \cdot 10^{7}$, $em = 5{,}32 \cdot 10^{17}$,

und für e den letzten Millikanschen Wert[1]);

$$e = 4{,}774 \cdot 10^{-10},$$

so folgt für die Strahlungskonstante:

$$a = 7{,}62 \cdot 10^{-15},$$

eine Größe, die sich sehr gut zwischen die neuesten experimentellen Werte

$7{,}56 \cdot 10^{-15}$ (Shakespear 1912)
$7{,}87 \cdot 10^{-15}$ (Gerlach 1912)
$7{,}85 \cdot 10^{-15}$ (Keene 1913)

einreiht[2]).

Aus der Gleichung (5) folgt alsdann für das Plancksche Wirkungsquantum

$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}.$$

1) Millikan, l. c. Dieser Wert ist in guter Übereinstimmung mit dem neuesten Resultat $4{,}764 \cdot 10^{-10}$ von J. Y. Lee, Phys. Rev. (2) **4**, 420, 1914.

2) Zu ähnlichem ($7{,}61 \cdot 10^{-15}$) Schlußwert gelangt W. W. Coblentz in seinem Bericht (l. c. S. 367).

Zürich, April 1916.

(Eingegangen 12. April 1916.)

1) Vgl. R. Pohl, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **8**, 406, 1911 u. Millikan, diese Zeitschr. **14**, 796, 1913.

2) Vgl. W. W. Coblentz, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **10**, 340, 1913 u. W. Gerlach, Ann. d. Phys. (4) **41**, 113, 1913.

Ein fahrbarer Laboratoriumstisch für die Gaedesche Molekularluftpumpe.

Von Heinrich Hörig[1]).

(Mit Tafel V.)

Wer mit der Molekularluftpumpe von Gaede, hergestellt von E. Leybolds Nachfolger, Cöln a. Rh., gearbeitet hat, wird wissen, daß sorgfältige, erschütterungssichere Aufstellung sehr wichtig ist — von Leybold wird sogar, wo angängig, feste Montierung auf Steinsockel empfohlen. Infolge der ungemein hohen Leistungsfähigkeit der Pumpe wird man sie aber, namentlich in größeren Instituten, gern öfters in verschiedenen Arbeitszimmern benutzen, vielleicht, wozu sie ja prädestiniert erscheint, die Maschine auch bei Vorlesungen verwenden wollen. Auf solche Verhältnisse Rücksicht nehmend, habe ich einen fahrbaren eisernen Tisch konstruiert, dessen Herstellung an Hand der hier mitzuteilenden Zeichnungen wohl ohne weiteres in jeder Physikalischen Institutswerkstätte möglich sein dürfte. Die verwendeten Profileisenstücke kann man fertig geschnitten beziehen, die drei Schrauben, welche die Entlastung der Räder bewirken, wenn wirklich nicht

1) Die Mittel für die Anschaffung der Pumpe und Herstellung der Fahrtische verdanken wir der Robert Bosch-Stiftung.

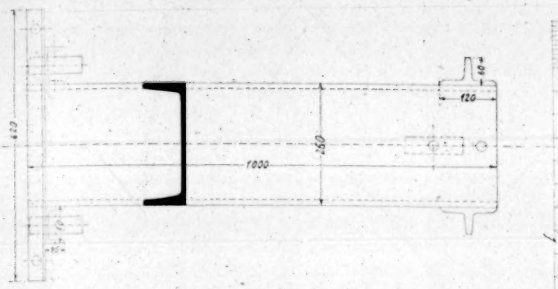


Fig. 2.

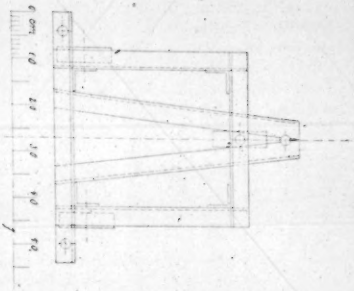


Fig. 3.

herstellbar, in jeder Maschinenfabrik anfertigen lassen. — Der Fig. 1 (Tafel V), welche den Tisch in Grund-Auf- und Seitenriß zeigt, mag erläuternd noch einiges hinzugefügt werden.

Die vertikalen, mit drei bequemen „Handrädern" versehenen 25 mm starken Eisenstangen laufen mit einzölligem (scharfgängigem) Gewinde in den drei aus Stahlguß[1]) hergestellten „Füßen", welche an ihrem zylindrischen Ende zwecks seitlicher Zusammenklemmung aufgesägt sind. Die Gewindelänge der Spindeln beträgt 220 mm. Durch diese Anordnung wird erreicht, daß man die Laufräder (technische Hartholzrollen mit Eisenfassung) nicht nur entlasten, sondern maximal etwa 100 mm über den Boden heben kann. Dies ist für das Experimentieren sehr vorteilhaft, namentlich beim Glasblasen, und gestattet auch die Pumpe durch Senken von einer Anordnung zu trennen, die man nicht abzubrechen wünscht. Die Achse für die beiden Hinterräder ist von unten in Schlitze der beiden vertikalen Winkeleisen gesetzt. Das vordere Rad läuft in einer geschmiedeten Gabel, deren Lenkachse oben mit einem abnehmbaren (Gabel und Stift) Handgriff versehen ist. Durch Stifte unterhalb der Platte wird der Spielraum der Drehung auf etwa 240° begrenzt. Der Handgriff streicht auch in Fahrstellung, ohne zu berühren, über die vordere Entlastungsstange. — Die verwendeten Profile sind: obere und untere Platte: $260 \times 90 \times 10{,}5$ mm; vertikal: $50 \times 50 \times 7$; horizontal und große Diagonalen: $40 \times 40 \times 6$ beziehentlich unten senkrecht der Längsachse des Tisches: $60 \times 40 \times 6$; kleine Diagonalen: $28 \times 17 \times 3{,}5$.

Der Verband ist überall mit blanken halbzölligen Schrauben (nur an einigen, leicht ersichtlichen Stellen sind $^3/_8$zöllige benutzt) bewirkt, was für Laboratoriumsgebrauch einer Nietung unbedingt vorzuziehen ist. — Die obere Platte ist gehobelt. Sie besitzt drei Schlitze von 10 bzw. 30 mm Weite, welche die zur Riemenspannung erforderliche Bewegung einer 10 mm starken, als Grundplatte für den Motor bestimmten Eisenplatte beziehentlich deren Feststellung bewirken lassen.

Die unterhalb der Platte befindliche Schraube hat halbzölliges Gewinde und besitzt einen an der Hinterseite des Tisches leicht zugänglichen Kopf (30×30), der sich dank einer kräftigen Fräsung am Umfange leicht von Hand drehen läßt. Die Entlastungsstangen sind am oberen Ende noch mit je einer Flügelmutterklemme versehen, die ein Klirren beim Betrieb unmöglich macht — doch sei hier bemerkt, daß infolge der schweren und statisch bestimmten Konstruktion auch bei voller Tourenzahl fast keine Vibration zu bemerken ist[1]) — auch beim Anlassen zeigen sich keinerlei Resonanzen. — Unterhalb der Ölablaßschrauben sowie der roten Schraube der Pumpe sind 25 mm weite Löcher in der Platte vorgesehen, um ein bequemes Ablassen des Öles beziehentlich Benzins zu ermöglichen. Die Anordnung des Anlaßwiderstandes, Schalters usw. bleibt selbstverständlich dem Geschmacke überlassen; ich habe auf der großen Diagonale an der Riemenseite einen Schieberwiderstand und daran anschließend in der oberen Ecke Schalter und Steckdose angebracht. Auf der unteren *U*-Platte kann mit Vorteil die Gaedesche Kapselpumpe aufgestellt werden, so daß dann die ganze Anlage auf relativ geringem Raum zusammengestellt ist. Es ist auch leicht möglich, den jeweiligen Bedürfnissen entsprechend Bohrungen zum Einsetzen von Stativstangen vorzusehen, was für Demonstrationsexperimente von Nutzen sein kann. Zweckmäßig montiert man auch eine Wasserwage.

1) Oder aus gewöhnlichem Maschinenguß.

1) Der Motor ist zur Vermeidung axialen Stoßes mit Kugellagern gewählt worden.

Etwas schlanker kann man die Konstruktion gestalten, wenn man von dem in Fig. 2 skizzierten Grundrisse ausgeht. In diesem Falle dürfte man auch ohne Diagonalen auskommen. Der Einfachheit halber habe ich das Modell, welches ich für das hiesige Institut konstruiert habe, hier genau wiedergegeben. — Ein analog gebautes, aber bedeutend leichteres Fahrgestell habe ich für die Gaedesche Quecksilberpumpe, für deren Transport ja bekanntlich ein Fahrtisch recht erwünscht ist, bauen lassen. Eine Skizze vom Grundriß zeigt Fig. 3. Der Motor sitzt in diesem Falle unter der Pumpe. Trotz der relativ geringen Entfernung der Laufrollen zeigt sich der Tisch durchaus stabil fahrend.

Endlich darf vielleicht noch darauf hingewiesen werden, daß dieser Molekularpumpenfahrtisch, nötigenfalls in passend geänderter Form, für recht viele Laboratoriumsbedürfnisse verwendet werden kann.

Herrn Professor Dr. K. R. v. Koch danke ich herzlich für sein bereitwilliges Eingehen auf meine Vorschläge.

Stuttgart, Physikal. Institut der Königl. Techn. Hochschule, 8. April 1916.

(Eingegangen 9. April 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über die Dimensionen physikalischer Größen.

Von C. Runge.

§ 1.

Der Begriff der Dimension einer physikalischen Größe und die Erkenntnis, daß eine physikalische Gleichung einen Irrtum enthält, wenn ihre Terme „in den Dimensionen nicht übereinstimmen", stammt von Fourier, der den Gegenstand in der IX. Sektion des 2. Kapitels seiner Theorie der Wärme ausführlich auseinandergesetzt hat. Seitdem bildet er eine Grundlage aller physikalischen Bildung.

Fourier erläutert seine Dimensionsbetrachtungen an der von ihm aufgestellten Gleichung:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{hl}{CDs}v = 0$$

der Wärmeleitung in einem Stabe von konstantem Querschnitt und konstantem Querschnittsumfang. Dabei mißt x die Längsausdehnung des Stabes, s den Querschnitt, l den Umfang, v die Temperaturdifferenz gegen die Umgebung, C die Wärmekapazität, D die Dichte, K die innere Leitfähigkeit, h die Leitfähigkeit der Oberfläche, t die Zeit. Die Einheiten der Länge, Masse, Zeit, Temperatur und Wärmemenge werden dabei unabhängig voneinander angenommen. Fourier gibt nun in einer Tabelle an, wie sich die in der Gleichung vorkommenden Maßzahlen ändern, wenn man die Einheiten der Länge, der Zeit und der Temperatur ändert. Die Tabelle lautet so:

	Länge	Zeit	Temperatur
x	1	0	0
t	0	1	0
v	0	0	1
K	−1	−1	−1
h	−2	−1	−1
D	−3	0	0
C	0	0	−1

Sie ist so zu verstehen, daß sich z. B. die Maßzahl D in $n^{-3}D$ verwandelt, wenn durch Änderung der Längeneinheit die Maßzahl einer Länge in das n-fache verwandelt wird (d. h. durch Reduktion der Längeneinheit auf $1/n$). In der Tabelle sind die Kolonnen für die Einheit der Masse und der Wärmemenge nicht mit aufgeführt, offenbar, weil die Wahl der Masseneinheit nur die Maßzahlen C und D beeinflußt und auch diese nur so, daß CD ungeändert bleibt, und weil die Einheit der Wärmemenge nur die Maßzahlen h, K und C beeinflußt und auch diese nur so, daß $\frac{h}{C}$ und $\frac{K}{C}$ ungeändert bleibt. Die Dimensionen von l und s sind auch als selbstverständlich weggelassen. Heute würden wir in einer meines Wissens von Maxwell herrührenden Bezeichnung z. B. sagen die Dimension der Dichte sei $[L^{-3}M]$.

Die Exponenten von L und M sind dabei die in Fouriers Tabelle angegebenen Zahlen, wenn man sich eine Kolonne für die Masse hinzugefügt denkt. Die Prüfung seiner Wärmeleitungsgleichung nimmt Fourier nun in der Weise vor, daß er einzeln die vorkommenden Einheiten sich geändert denkt. Wird z. B. die Längeneinheit auf $1/n$ reduziert, so bleibt der erste Term $\frac{dv}{dt}$ unbeeinflußt, in dem zweiten und dritten Term ändern sich K, D, dx, h, l, s und gehen in $n^{-1}K, n^{-3}D, ndx, n^{-2}h, nl, n^2s$ über, derart, daß auch der zweite und dritte Term wie der erste nicht von der Längeneinheit abhängen. Führt man auch für die andern Einheiten die Betrachtung durch, so zeigt sich, daß alle drei „dieselbe Dimension" haben, nämlich die Dimension „Temperatur durch Zeit". Wäre dies Kriterium nicht erfüllt, hätte z. B. der erste Term eine andere Dimension als die andern beiden, so könnte er nicht von Null verschieden sein.

Denn man könnte sonst durch passende Wahl der Einheiten seinen Wert relativ zu dem Werte der Summe der beiden andern Terme ändern, was der Gleichung widerspricht.

Besitzt eine Gleichung mehr als drei Terme, so wäre der Fall möglich, daß eine Gruppe von ihnen eine andere Dimension hätte als die übrigen. Dann müßte diese Gruppe für sich Null sein und die Gleichung müßte sich in ebensoviel Gleichungen spalten lassen als Gruppen von verschiedener Dimension gebildet werden können. Mit dieser Einschränkung auf Gleichungen, die nicht in zwei oder mehr zerfallen, kann man also sagen, daß sie aus Termen gleicher Dimension bestehen müssen.

§ 2.

Fourier hat seine Dimensionsbetrachtungen, wie es scheint, nur zur Kontrolle physikalischer Gleichungen angewendet. Es gibt aber noch eine andere nicht minder wichtige Verwendungsmöglichkeit, nämlich, um die Form der Abhängigkeit physikalischer Größen zu untersuchen. Nimmt man als bekannt an, daß eine physikalische Größe durch gewisse andere bestimmt ist, so kann man aus der Kenntnis ihrer Dimensionen die Form der Gleichung erschließen, die zwischen ihren Maßzahlen besteht. Dies möge an einigen Beispielen erläutert werden.

1. Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels für unendlich kleine Schwingungen ist durch die Pendellänge und die Erdbeschleunigung bestimmt. T, l und g seien die Maßzahlen dieser drei Größen. Die Erdbeschleunigung wird durch die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit gemessen und hat mithin die Dimension Geschwindigkeit durch Zeit oder $[LT^{-2}]$ nach Maxwells Bezeichnungsweise. Mithin hat g dieselbe Dimension wie $\frac{l}{T^2}$ oder $\frac{gT^2}{l}$ ist dimensionslos, d. h. der Wert von $\frac{gT^2}{l}$ ist von den beiden zugrunde liegenden voneinander unabhängigen Einheiten der Länge und der Zeit unabhängig. Wäre es nicht möglich, aus T, l, g eine dimensionslose Kombination zu bilden, so wäre keine Gleichung möglich, die nur diese drei Größen enthielte, weil man dann durch geeignete Wahl der Einheiten den Maßzahlen T, l, g unabhängig voneinander beliebige Werte geben könnte.

Die Gleichung zwischen T, g, l werde zunächst in der allgemeinen Form

$$T = f(l, g)$$

geschrieben. Statt T führen wir auf der linken Seite die dimensionslose Größe $\sqrt{\frac{g}{l}}\,T$ ein und schreiben

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,T = \sqrt{\frac{g}{l}}\,f(l, g) = \varphi(l, g).$$

Jetzt denken wir uns die physikalischen Größen festgehalten, aber die Einheit der Zeit geändert. Dann ändert sich g, während $\varphi(l, g)$ ungeändert bleibt, weil es einer dimensionslosen Größe gleich ist. Folglich ist $\varphi(l, g)$ von g unabhängig. Wir können also g auf der rechten Seite weglassen und $\varphi(l)$ dafür schreiben. Andererseits ändern wir die Längeneinheit. Dann ändert sich l, während $\varphi(l)$ ungeändert bleibt. Folglich ist $\varphi(l)$ von l unabhängig. Mit andern Worten: die rechte Seite ist eine von den zugrunde gelegten Einheiten unabhängige absolute Zahl. Daß ihr Wert gleich 2π ist (unter T die volle Schwingungsdauer verstanden), läßt sich allerdings durch Dimensionsbetrachtungen allein nicht beweisen. Aber wir gewinnen doch so viel, daß die Messung von T, l, g für ein spezielles Pendel in einem speziellen Schwerefeld den Wert von $\sqrt{\frac{g}{l}}\,T$ für alle Pendel und alle Schwerefelder festlegen würde.

Das Wesentliche bei dieser Überlegung ist erstens, daß T eine Funktion von l und g ist[1]), zweitens daß l und g durch bloße Änderung der Einheiten beliebige Werte bekommen können oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß aus l und g allein keine dimensionslose Kombination gebildet werden kann.

Es möge ein zweites Beispiel besprochen werden, wo es sich auch um eine Abhängigkeit zwischen drei Größen handelt, wo aber die zweite Voraussetzung nicht erfüllt ist.

2. Auf einer Kugel von gegebenen Volumen sei ein Kreis mit einem gegebenen sphärischen Radius gezogen. Dann ist die sphärische Fläche dieses Kreises durch das Volumen der Kugel und den sphärischen Radius bestimmt. Die Maßzahlen seien F, V, R. Die erste Voraussetzung ist, daß

$$F = f(V, R).$$

Wir dividieren durch R^2, um auf der linken Seite eine dimensionslose Größe zu erhalten

$$\frac{F}{R^2} = \frac{1}{R^2} f(V, R) = \varphi(V, R).$$

Jetzt sind aber V und R durch bloße Änderung der Einheiten nicht unabhängig voneinander veränderlich. Es läßt sich die dimensions-

1) Daraus ergibt sich, daß aus T, g, l eine dimensionslose Kombination gebildet werden kann.

lose Kombination $\frac{V}{R^3}$ bilden. Wir setzen $\frac{V}{R^3} = u$ und schreiben

$$\frac{F}{R^2} = \varphi(uR^3, R) = \psi(u, R).$$

Ändern wir die Einheiten, so bleiben $\frac{F}{R^2}$ und u ungeändert und nur R ändert sich. Mithin ist $\psi(u,R)$ von R unabhängig und wir können $\psi(u)$ dafür schreiben; aber von u bleibt es abhängig. Das Resultat ist also

$$\frac{F}{R^2} = \psi\left(\frac{V}{R^3}\right).$$

Die eine dimensionslose Größe $\frac{F}{R^2}$ ist eine Funktion der andern dimensionslosen Größe $\frac{V}{R^3}$. Die Beschaffenheit der Funktion ψ läßt sich durch bloße Dimensionsbetrachtungen nicht weiter ergründen. Aber so viel ist doch gewonnen, daß nur eine Funktion einer Veränderlichen unbekannt bleibt. Wir könnten z. B. durch Messung von F für eine Reihe von Werten von R auf einer einzigen Kugel den Verlauf der Funktion $\psi(u)$ experimentell ermitteln; dann würde der Zusammenhang von F, R und V auch für jede beliebige andere Kugel damit gefunden sein.

Eine elementare Rechnung zeigt, daß

$$\psi(u) = \pi \cdot \left(\frac{\sin\sqrt[3]{\frac{\pi}{6u}}}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{6u}}}\right)^2.$$

In diesem Falle ist also von den 3 Maßzahlen F, R, V, wenn die physikalischen Größen selbst festgehalten werden, nur eine beliebig veränderlich, weil nur eine Einheit willkürlich bleibt. Die andern beiden Maßzahlen sind dann durch die dimensionslosen Kombinationen aus ihr abzuleiten. Welche von den 3 Maßzahlen man als unabhängige wählt, das führt nur zu formalen Unterschieden.

Andere Beispiele:

3. Eine Masse wird an einem Faden von gegebener Länge im Kreise mit gegebener Geschwindigkeit herumgeschleudert. Dann ist die Spannung des Fadens bestimmt. Die Maßzahlen seien m, l, v, k. Werden die Einheiten der Masse, Länge und Geschwindigkeit unabhängig voneinander angenommen, so sind bei festgehaltenen physikalischen Größen die Maßzahlen m, l, v beliebig. Die Einheit der Kraft ist aber dann nicht mehr beliebig. k hat dieselbe Dimension wie $\frac{mv^2}{l}$ oder $\frac{kl}{mv^2}$ ist dimensionslos. Der Zusammenhang der vier Größen muß in der Form

$$\frac{kl}{mv^2} = \varphi(m, l, v)$$

darstellbar sein. Da aber m, l, v keine dimensionslose Kombination liefern, so muß die rechte Seite eine von m, l, v unabhängige Zahl sein. In der Tat ist

$$\frac{kl}{mv^2} = 1.$$

4. Ein Planet bewege sich im Kreise um eine Sonne von gegebener Masse. Seine Masse sei so klein, daß die Sonne nicht merklich bewegt wird. Seine Umlaufszeit ist gegeben, wenn die Sonnenmasse, der Radius des Kreises und die Gravitation gegeben ist. Die Maßzahl der Gravitation wird durch die Kraft bestimmt, die zwei Massen von der Größe 1 in der Einheit der Entfernung aufeinander ausüben. Die Maßzahlen der 4 Größen seien T, M, R, k. Die Einheiten, auf die sich die ersten drei Maßzahlen beziehen, sind unabhängig voneinander. Die Kraft, mit der sich zwei Massen anziehen, sei dem Produkt der beiden Massen und der $-\lambda^{\text{ten}}$ Potenz der Entfernung proportional. Dann hat $kM^2 \cdot R^{-\lambda}$ die Dimension einer Kraft und demnach ist

$$\frac{kM^2R^{-\lambda}}{MRT^{-2}} = \frac{kT^2M}{R^{\lambda+1}}$$

dimensionslos. Da zwischen den vier Maßzahlen keine andere dimensionslose Kombination möglich ist, so muß $\frac{kT^2M}{R^{\lambda+1}}$ eine reine Zahl sein.

Die Quadrate der Umlaufszeiten verschiedener Planeten um dieselbe Sonne verhalten sich demnach wie die $\lambda+1^{\text{ten}}$ Potenzen der Entfernungen, wenn die Anziehungskraft der λ^{ten} Potenz umgekehrt proportional ist.

5. Ein Körper bewege sich parallel mit sich durch eine inkompressible Flüssigkeit. Die Richtung der Bewegung und die Gestalt des Körpers möge vorgeschrieben sein bis auf den Maßstab, in dem er ausgeführt ist. Um den Maßstab zu bestimmen, möge das Volumen des Körpers betrachtet werden. Der Widerstand, den ein Körper von dieser Gestalt bei seiner Bewegung erfährt, ist bestimmt, wenn gegeben ist sein Volumen, seine Geschwindigkeit, die Dichte und der Reibungskoeffizient der Flüssigkeit. Die Maßzahlen dieser fünf Größen seien W, V, v, ϱ, μ.

Soll es möglich sein, W als Funktion der übrigen vier Maßzahlen durch eine physikalische

Gleichung darzustellen, so muß die Einheit, auf die sich W bezieht, auf die der anderen zurückführbar sein, d. h. es muß aus V, v, ϱ, μ mindestens eine Kombination hergestellt werden können, deren Dimension gleich der von W ist. Das ist in der Tat der Fall. W hat die Dimension einer Kraft, also $W\sqrt[3]{V}$ die Dimension einer Energie. Andererseits hat auch $\varrho v^2 V$ die Dimension einer Energie. Mithin hat $\varrho v^2 V^{\frac{1}{3}}$ dieselbe Dimension wie W oder

$$\frac{W}{\varrho v^2 V^{\frac{1}{3}}}$$

ist dimensionslos. Diese dimensionslose Größe müßte also ebenfalls eine Funktion von ϱ, v, V, μ sein. Bestünde nun zwischen den Einheiten dieser vier Maßzahlen keine weitere Abhängigkeit, so könnte man den vier Maßzahlen beliebige Werte geben, ohne die physikalischen Größen selbst zu ändern. Dabei aber ändert sich die linke Seite der Gleichung nicht, weil sie als dimensionslose Größe von den gewählten Einheiten ganz unabhängig ist. Mithin könnte sich auch die rechte Seite nicht ändern und müßte daher eine absolute Zahl sein. Das nächste muß also sein, zu untersuchen, ob die Einheiten von ϱ, v, V, μ voneinander unabhängig sind. Wenn wir die Einheit der Länge beliebig annehmen, so ist V beliebig, wenn außerdem die Einheit der Zeit beliebig bleibt, so ist auch v beliebig, und wenn dazu noch über die Einheit der Masse verfügt werden kann, so ist auch noch ϱ beliebig. Dann ist aber μ nicht mehr beliebig. Denn der Reibungskoeffizient μ wird gemessen durch die Schubspannung, die in einer Ebene durch die Reibung der Flüssigkeit entsteht, wenn senkrecht zu der Ebene ein Geschwindigkeitsgefälle 1 herrscht. D. h. μ hat die Dimension Kraft durch das Produkt Fläche mal Geschwindigkeitsgefälle oder was dasselbe ist, Energie durch Fläche mal Geschwindigkeit; μ hat dieselbe Dimension wie

$$\frac{\varrho v^2 V}{V^{\frac{2}{3}} v} \text{ oder } \varrho v V^{\frac{1}{3}}.$$

Mithin ist der Ausdruck

$$\frac{\varrho v V^{\frac{1}{3}}}{\mu},$$

den wir mit dem Buchstaben R bezeichnen wollen, dimensionslos. Diese dimensionslose Größe R denken wir uns auf der rechten Seite anstatt μ eingeführt, indem wir

$$\mu = \frac{\varrho v V^{\frac{1}{3}}}{R}$$

setzen. Sie wird die Reynoldsche Zahl genannt. Die rechte Seite wird dann eine Funktion der Reynoldschen Zahl und der Maßzahlen ϱ, v, V. Nun aber können ϱ, v, V durch passende Wahl der Einheiten beliebige Werte annehmen, ohne daß die physikalischen Größen sich ändern. Dabei bleiben auch die dimensionslosen Größen ungeändert. Mithin muß die rechte Seite von ϱ, v, V ganz unabhängig und nur eine Funktion der Reynoldschen Zahl sein, d. h. es ist

$$\frac{W}{\varrho \cdot v \cdot V^{\frac{2}{3}}} = f\left(\frac{\varrho v V^{\frac{1}{3}}}{\mu}\right).$$

Über die Natur der Funktion f kann man durch bloße Dimensionsbetrachtungen nichts aussagen. Indessen ergeben sich physikalische Gesichtspunkte, die einen gewissen Verlauf der Funktion wahrscheinlich erscheinen lassen. Z. B. wird man annehmen können, daß der Widerstand, wenn die Reibung sehr klein ist, sich nicht mehr wesentlich ändern wird, wenn man die Reibung noch kleiner werden läßt. Mit andern Worten, die Funktion f wird sich für große Argumente einer konstanten Zahl nähern, was in der Tat durch die Versuche bestätigt wird. Für kleine Argumente dagegen spielt die Reibung eine wesentliche Rolle. Die Funktion f wird also für kleine Werte der Reynoldschen Zahl sehr wesentlich von ihr abhängen, und da der Widerstand mit μ zugleich beliebig groß werden muß, so ist die nächstliegende Annahme die, daß die Funktion f für kleine Werte der Reynoldschen Zahl ihr umgekehrt proportional ist

$$\frac{W}{\varrho v^2 V^{\frac{2}{3}}} = \text{const.} \frac{\mu}{\varrho v V^{\frac{1}{3}}}$$

$$\left(\text{für kleine Werte von } \frac{\varrho v V^{\frac{1}{3}}}{\mu}\right)$$

oder

$$W = \text{const.}\, \mu v V^{\frac{1}{3}}.$$

Mit andern Worten, der Widerstand ist für große Geschwindigkeiten dem Quadrat der Geschwindigkeit und der ersten Potenz der Dichte proportional und unabhängig von dem Reibungskoeffizienten, für kleine Geschwindigkeiten ist dagegen der Widerstand der Geschwindigkeit direkt proportional und bei gleichem Reibungskoeffizient unabhängig von der Dichte. Und was die Abhängigkeit vom Maßstab anbelangt, so ist der Widerstand bei hohen Geschwindigkeiten dem Quadrat der linearen Dimension, bei kleinen Geschwindigkeiten der linearen Dimension selbst proportional.

Wird die Flüssigkeit als kompressibel angenommen, so tritt zu den vier physikalischen Größen, von denen der Widerstand abhängt, noch die Kompressibilität hinzu.

Es möge $\frac{d\varrho}{dp}$ als Maßzahl der Kompressibilität angesehen werden, wo p die Maßzahl des Druckes bedeutet. Für nicht zu große Dichtigkeitsänderungen ist $\frac{d\varrho}{dp}$ als konstant zu betrachten. Die Dimension von $\frac{d\varrho}{dp}$ ist gleich der von v^{-2}[1]. Unter den fünf Größen

$$\varrho, V, v, \mu, \frac{d\varrho}{dp}$$

sind nun zwei dimensionslose Kombinationen; denn außer

$$\frac{\varrho v V^2}{\mu} \text{ ist auch } \frac{d\varrho}{dp} v^2$$

dimensionslos. Wenn wir nun diese beiden dimensionslosen Größen als Variable an Stelle von μ und $\frac{d\varrho}{dp}$ einführen und beachten, daß wieder durch Änderung der Einheiten ϱ, V, v beliebige Werte annehmen können, ohne daß sich die physikalischen Größen selbst ändern, so erkennen wir, daß die Beziehung zwischen den betrachteten physikalischen Größen die Form hat

$$\frac{W}{\varrho V^2 v^2} = f\left(\frac{\varrho v V^2}{\mu}, \frac{d\varrho}{dp} v^2\right).$$

Ist $\frac{d\varrho}{dp} v^2$ klein, d. h. ist die Bewegungsgeschwindigkeit nur ein kleiner Bruchteil der Schallgeschwindigkeit, so wird die rechte Seite nur wenig geändert, wenn man für das zweite Argument der Funktion Null einsetzt. Damit erhält man dieselbe Formel, wie für eine inkompressible Flüssigkeit. Nähert sich dagegen die Geschwindigkeit der Schallgeschwindigkeit, so wird die Gleichung wesentlich anders.

Der Körper bewege sich in einem Gase mit Geschwindigkeiten, die klein gegen die Schallgeschwindigkeit sind, so daß wir das Gas als inkompressibel betrachten können; aber die lineare Ausdehnung des Körpers werde so klein, daß das Gas nicht mehr als kontinuierliche Flüssigkeit angesehen werden kann. Dann werden wir in erster Linie anzunehmen haben, daß die freie Weglänge des Gases den Widerstand beeinflussen wird. Sei λ die Maßzahl der freien Weglänge. Da $\frac{\lambda}{V^2}$ dimensionslos ist, so ergibt sich nach derselben Schlußweise wie oben

$$\frac{W}{\varrho v^2 V^2} = f\left(\frac{\varrho v V^2}{\mu}, \frac{\lambda}{V^2}\right),$$

oder wenn wir die Funktion f für kleine Werte der Reynoldschen Zahl ihr umgekehrt proportional setzen

$$W = \mu v V^2 \varphi\left(\frac{\lambda}{V^2}\right)^{1}).$$

6. Die Energie, die die Oberfläche eines schwarzen Körpers in der Form von Licht- und Wärmewellen ausstrahlt, ist für jede Schwingungszahl bestimmt, wenn seine Temperatur gegeben ist. Es möge versucht werden, durch Dimensionsbetrachtungen etwas über die Form der Abhängigkeit zu ermitteln. Es sei $u\,dv$ die Maßzahl der von der Flächeneinheit in der Zeiteinheit ausgestrahlten Energie, soweit die Schwingungszahl der Strahlen in dem Intervall v bis $v + dv$ liegt, wo v die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit bedeutet. ϑ sei die Maßzahl der absoluten Temperatur. Soll die Temperatur unter den Veränderlichen vorkommen, so muß die Einheit, auf die sich ihre Maßzahl bezieht, mindestens mit einer der übrigen Einheiten in Beziehung stehen. Das ist möglich, wenn wir als Thermometer die Ausdehnung eines Gases in sehr hoher Verdünnung anwenden. Ist p die Maßzahl des Druckes, v die des Volumens des Gases, so ist nach der kinetischen Gastheorie $\frac{3}{2} p v$ die translatorische kinetische Energie. Sei N die Zahl der Moleküle, so ist

$$\frac{p v}{N}$$

gleich der Maßzahl von $\frac{2}{3}$ der mittleren translatorischen kinetischen Energie eines Moleküls. Diese Größe werde als Maßzahl der absoluten Temperatur benutzt und mit ϑ bezeichnet. Sie ist von der Natur und von der Menge des Gases unabhängig, weil bei zwei Gasen von gleicher Temperatur die mittlere translatorische Energie des Moleküls die gleiche ist. Die Dimension von ϑ ist die einer Energie.

Wir wollen nun zunächst annehmen, die in einem Spektralintervall ausgestrahlte Energie sei allein von der Schwingungszahl, der Lichtgeschwindigkeit und der als Energie gemessenen absoluten Temperatur abhängig. Es müßte dann die Maßzahl u durch ν und ϑ und die Maßzahl c der Lichtgeschwindigkeit ausdrückbar sein. Zu dem Ende müßte aus ν, ϑ und c eine Kombination gebildet werden können von der

1) In der Tat ist ja $\sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$ nichts anderes als die Schallgeschwindigkeit.

1) Für die Kugel hat E. Cunningham eine Formel abgeleitet, bei der φ eine lineare Funktion seines Arguments ist. Das würde auch für andere Formen anzunehmen sich empfehlen.

gleichen Dimension wie u. $u dv$ hat die Dimension einer Energie durch das Produkt einer Fläche und einer Zeit. v hat die Dimension einer reziproken Zeit. Also hat u die Dimension einer Energie durch eine Fläche. Nun hat ϑ die Dimension einer Energie und c/v die einer Länge, folglich hat

$$\frac{\vartheta v^2}{c^2}$$

dieselbe Dimension wie u und

$$\frac{uc^2}{\vartheta v^2}$$

ist dimensionslos. Zwischen v, ϑ und c ist keine dimensionslose Kombination möglich. Denn v ist allein von der Zeiteinheit abhängig. Ist über die Zeiteinheit verfügt, so bleibt die Maßzahl c immer noch willkürlich durch passende Verfügung über die Längeneinheit, und liegt auch diese fest, so bleibt ϑ noch willkürlich durch passende Wahl der Masseneinheit.

Daraus folgt unter der Annahme, daß u allein durch v, ϑ und c bestimmt ist, daß

$$\frac{uc^2}{\vartheta v^2}$$

eine absolute Zahl sein muß.

Das ist die Rayleighsche Strahlungsformel, die aber der Erfahrung nicht entspricht. Die Prämisse ist also unrichtig, daß u allein durch v, ϑ, c bestimmt sei. Es muß noch eine andere physikalische Größe in der Strahlungsformel eine Rolle spielen. Nimmt man an, daß das Wirkungsquantum diese Größe sei, so hat man zu überlegen, ob durch ihr Hinzutreten eine zweite dimensionslose Kombination gebildet werden könnte. Das Wirkungsquantum hat die Dimension Energie mal Zeit. Sei h seine Maßzahl, so ist also $\frac{hv}{\vartheta}$ dimensionslos. Wenn wir jetzt statt h diese Kombination $\frac{hv}{\vartheta}$ hinzunehmen, so erhalten wir $\frac{uc^2}{\vartheta v^2}$ als Funktion der vier Größen $v, \vartheta, c, \frac{hv}{\vartheta}$. Da aber v, ϑ, c durch passende Wahl der Einheiten jeden beliebigen Wert erhalten können, ohne daß sich die dimensionslosen Größen ändern, so folgt, daß die rechte Seite von v, ϑ, c unabhängig ist. Das heißt es ist

$$\frac{uc^2}{\vartheta v^2} = f\left(\frac{hv}{\vartheta}\right)$$

oder auch

$$\frac{uc^2}{\vartheta v^2} \cdot \frac{\vartheta}{hv} = \frac{\vartheta}{hv} f\left(\frac{hv}{\vartheta}\right) = \varphi\left(\frac{hv}{\vartheta}\right)$$

oder

$$\frac{uc^2}{hv^3} = \varphi\left(\frac{hv}{\vartheta}\right)$$

oder

$$u = \frac{h}{c^2} v^3 \varphi\left(\frac{hv}{\vartheta}\right).$$

Diese Formel ist nichts anderes als das Wiensche Verschiebungsgesetz, daß sich hier also durch bloße Dimensionsbetrachtungen ergibt aus der Annahme, daß außer den Größen v, ϑ, c noch eine physikalische Größe von der Dimension Energie mal Zeit eine Rolle spielt.

Umgekehrt kann man aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz den Schluß ziehen, daß in der Strahlungsformel eine Größe von der Dimension des Wirkungsquantums eine Rolle spielt. Denn das Verschiebungsgesetz besagt zunächst, daß die absolute Temperatur nur in der Verbindung ϑ/v in der Formel vorkommen kann. Wenn man nun durch die Erfahrung weiß, daß die bei einer bestimmten Stelle des Spektrums ausgestrahlte Energie nicht einer Potenz der absoluten Temperatur proportional ist, so kann ϑ nur so in der Formel vorkommen, daß diese eine Funktion mit einem aus ϑ/v gebildeten dimensionslosen Argument enthält. Dieses dimensionslose Argument können wir in der Form $\frac{\vartheta/v}{h}$ schreiben, wo h die Maßzahl einer physikalischen Größe von der Dimension von ϑv, d. h. Energie mal Zeit bedeuten muß.

Die Formel

$$u = \frac{h}{c^2} v^3 \varphi\left(\frac{hv}{\vartheta}\right)$$

ergibt bekanntlich durch Integration über v das Stefansche Gesetz, daß die Gesamtstrahlung der vierten Potenz der absoluten Temperatur proportional ist. Man kann dies Gesetz aber auch direkt durch bloße Dimensionsbetrachtungen erhalten unter der Annahme, daß die in der Zeiteinheit pro Flächeneinheit ausgestrahlte Energie allein von der Lichtgeschwindigkeit, dem Wirkungsquantum und der absoluten Temperatur abhängt. Denn aus den Maßzahlen c, h, ϑ können die Kombinationen $\frac{h}{\vartheta}$ von der Dimension einer Zeit und $\frac{ch}{\vartheta}$ von der Dimension einer Länge gebildet werden. Demnach hat

$$\frac{\vartheta}{\left(\frac{ch}{\vartheta}\right)^2 \cdot \frac{h}{\vartheta}}$$

dieselbe Dimension, wie die von der Flächeneinheit in der Zeiteinheit ausgestrahlte Gesamtenergie, deren Maßzahl mit U bezeichnet werden möge. Der Quotient

$$\frac{U c^2 h^3}{\vartheta^4}$$

ist daher dimensionslos und gleich einer absoluten Zahl; denn die Maßzahlen c, h, ϑ sind durch passende Wahl der Einheiten beliebig veränderlich.

Die in diesen Formeln angewendete Messung der absoluten Temperatur durch den Wert der Energiemenge

$$\frac{pv}{N}$$

kann auf die Messung durch Celsiusgrade zurückgeführt werden. Zu dem Ende müssen die Energiemengen ϑ_1 und ϑ_2 gemessen werden, die den Temperaturen des schmelzenden Eises und des siedenden Wassers bei normalem Druck entsprechen. Der hundertste Teil der Differenz dieser Energiemenge ist gleich

$$1{,}347 \cdot 10^{-16} \text{ erg.}$$

Wird ihre Maßzahl mit k bezeichnet, so ist

$$\frac{\vartheta}{k}$$

eine dimensionslose Größe, die in Celsiusgraden die absolute Temperatur angibt und ϑ ist das $k$fache dieser Zahl[1]).

Das Theorem, daß den vorhergehenden Beispielen zugrunde liegt, möge noch einmal in seiner allgemeinsten Form ausgesprochen werden.

Eine physikalische Größe, deren Maßzahl mit z bezeichnet werden möge, sei durch eine Reihe von anderen physikalischen Größen bestimmt, deren Maßzahlen wir mit $x_1\, x_2 \cdots x_n$ bezeichnen. Die Aufgabe ist, z als Funktion von $x_1, x_2 \cdots x_n$ auszudrücken. Zu dem Ende muß die Einheit, auf die sich z bezieht, mit den Einheiten, auf die sich $x_1\, x_2 \cdots x_n$ beziehen, zusammenhängen. Denn hinge sie nicht mit ihnen zusammen, könnte man sie unabhängig von den andern ändern, so könnte man z beliebig verändern, ohne $x_1\, x_2 \cdots x_n$ und ohne die betrachteten physikalischen Größen zu ändern, was der Voraussetzung $z = f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ widerspricht. Es hängt also die Einheit mit denen der andern Größen zusammen, d. h. es läßt sich aus $x_1\, x_2 \cdots x_n$ eine Kombination

$$x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

bilden, die von der gleichen Dimension ist wie z, oder es ist

$$z\, x_1^{-\alpha_1}\, x_2^{-\alpha_2} \cdots x_n^{-\alpha_n}$$

dimensionslos.

Nun fragt es sich weiter, wie die Einheiten auf die sich $x_1\, x_2 \cdots x_n$ beziehen, untereinander zusammenhängen. Sind sie alle voneinander unabhängig, so kann man, ohne die physikalischen Größen zu ändern, den Maßzahlen $x_1\, x_2 \cdots x_n$ beliebige Werte erteilen. Da aber

$$z\, x_1^{-\alpha_1}\, x_2^{-\alpha_2} \cdots x_n^{-\alpha_n}$$

als dimensionslose Größe sich nicht ändert, so muß es gleich einer von $x_1, x_2 \cdots x_n$ unabhängigen Zahl sein.

Besteht zwischen den Einheiten eine und nur eine Beziehung, so daß z. B. x_n dieselbe Dimension hat wie

$$x_1^{\beta_1}\, x_2^{\beta_2} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}},$$

so führt man statt x_n die dimensionslose Kombination

$$x_n\, x_1^{-\beta_1}\, x_2^{-\beta_2} \cdots x_{n-1}^{-\beta_{n-1}}$$

ein. Da $x_1, x_2 \cdots x_{n-1}$ beliebige Werte erhalten können, ohne die physikalischen Größen und die Maßzahlen der dimensionslosen Größen zu ändern, so ergibt sich demnach

$$z\, x_1^{-\alpha_1}\, x_2^{-\alpha_2} \cdots x_n^{-\alpha_n}$$

als Funktion von

$$x_n\, x_1^{-\beta_1}\, x_2^{-\beta_2} \cdots x_{n-1}^{-\beta_{n-1}}.$$

Besteht auch noch zwischen den Einheiten von $x_1\, x_2 \cdots x_{n-1}$ ein Zusammenhang derart, daß z. B. x_{n-1} dieselbe Dimension hat wie

$$x_1^{\gamma_1}\, x_2^{\gamma_2} \cdots x_{n-2}^{\gamma_{n-2}},$$

während die Einheiten von $x_1, x_2 \cdots x_{n-2}$ unabhängig voneinander sind, so ergibt sich

$$z\, x_1^{-\alpha_1}\, x_2^{-\alpha_2} \cdots x_n^{-\alpha_n}$$

als Funktion der beiden dimensionslosen Größen

$$x_n\, x_1^{-\beta_1}\, x_2^{-\beta_2} \cdots x_{n-1}^{-\beta_{n-1}}$$

und

$$x_{n-1}\, x_1^{-\gamma_1}\, x_2^{-\gamma_2} \cdots x_{n-2}^{-\gamma_{n-2}}$$

usw.

Das Endresultat ist also immer, daß eine dimensionslose Kombination, die z enthält, entweder gleich einer absoluten Zahl oder gleich einer Funktion von einer oder mehreren dimensionslosen Größen ist, die sich aus $x_1 \cdots x_n$ als Produkte von Potenzen zusammensetzen.

§ 3.

Die Abhängigkeit der Einheiten voneinander beruht immer auf einem physikalischen Zusammenhang. Dennoch ist man durch den physikalischen Zusammenhang nicht genötigt, die Einheiten voneinander abhängig zu machen. Die physikalischen Darstellungen weichen daher

1) Es ist üblich, k „die Boltzmannsche Konstante" zu nennen. Da k eine bestimmte Energiemenge bezeichnet, so würde es dem sonstigen physikalischen Sprachgebrauch entsprechen, diese Energiemenge nach Boltzmann zu benennen und sie, ebenso wie 10^7 erg nach Joule „ein Joule" genannt wird, als „ein Boltzmann" zu bezeichnen.

nicht selten darin voneinander ab, welche Einheiten sie aufeinander aufbauen. In der Relativitätstheorie ist es z. B. üblich, die Einheit der Zeit mit der Einheit der Länge so in Beziehung zu setzen, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 wird. Dann haben Zeit und Länge die gleiche Dimension und jede Geschwindigkeit ist dimensionslos. Diese Festsetzung hat für solche Untersuchungen einen guten Sinn, in denen die Lichtgeschwindigkeit eine grundlegende Rolle spielt und das Wesentliche jeder andern Geschwindigkeit ihr Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit ist. Bei andern Untersuchungen dagegen, die mit der Lichtgeschwindigkeit nichts zu tun haben, würde diese Bindung zwischen Zeit- und Längen-Einheit die Dimensionsbetrachtungen einschränken. So z. B. würden die Betrachtungen, die oben über den Widerstand in einer Flüssigkeit angestellt wurden, nicht möglich sein, wenn die Maßzahl der Geschwindigkeit dimensionslos ist.

Es ist daher mit Recht üblich, die Einheiten von Zeit und Länge unabhängig voneinander zu lassen. Ebenso könnte man die Einheit der Masse auf die der Länge und Zeit gründen durch die Festsetzung, daß die Newtonsche Gravitationskraft, die von einer punktförmigen Masse 1 in der Entfernung 1 auf eine andere punktförmige Masse 1 ausgeübt wird, ihr die Beschleunigung 1 erteilt. Die Masse erhielte dann die Dimension Länge zur dritten durch Zeitquadrat. In solchen Untersuchungen, in denen die Massen nur in bezug auf die Gravitationskräfte betrachtet werden, die sie hervorrufen, kann eine solche Festsetzung einen Zweck haben. In Untersuchungen aber, wo die Masse eine Rolle spielt, ohne daß Gravitationskräfte ins Spiel kommen, würde eine solche Festsetzung wieder die Dimensionsbetrachtungen unnötig beschränken.

Daher ist es im allgemeinen üblich, die Masseneinheit unabhängig von den Einheiten der Zeit und Länge zu lassen. Geschieht das, so tritt in dem Gravitationsgesetz die Maßzahl der Gravitation auf

$$K = k\frac{mm}{r^2},$$

wo K, m, r die Maßzahlen der Kraft, der Masse und der Entfernung, k die Maßzahl der Gravitation von der Dimension Kraft mal Längequadrat durch Massequadrat oder Länge zur dritten durch Masse mal Zeitquadrat.

Es ist nun weiter üblich, die Einheiten anderer physikalischer Größen, so weit sie in irgendwelchen Erscheinungen den Potenzen von Massen, Längen und Zeiten proportional sind, auf die Einheiten dieser letzteren aufzubauen. Gezwungen ist man nicht dazu, sondern es fragt sich in jedem Falle nur, ob es zweckmäßig ist. Man ist z. B. nicht gezwungen, der Maßzahl der Fläche die Dimension Länge mal Länge zu geben. Man kann sich die Flächeneinheit auch unabhängig von der Längeneinheit vorbehalten. Der Zusammenhang zwischen der Fläche eines Quadrates oder eines Kreises oder irgendeiner von einer linearen Größe abhängigen Figur einerseits und der linearen Größe andererseits würde dann für die Maßzahlen der Fläche und Länge auf eine Gleichung

$$F = kl^2$$

führen, wo k die Maßzahl einer physikalischen Größe von der Dimension Fläche durch Länge zum Quadrat ist. Die Zahl k könnte man die Maßzahl der „flächenbildenden Eigenschaft" der linearen Ausdehnung bei der betreffenden Figur nennen[1]). Der Grund, weshalb man solche physikalischen Größen nicht eingeführt hat, liegt darin, daß Flächen und Längen nur in diese Beziehung zueinander treten, daß eine Fläche dem Quadrat einer Länge proportional ist. Daher verliert man nichts für allgemeine Dimensionsbetrachtungen, wenn man die Einheit der Fläche von der der Länge abhängig macht, indem man für eine bestimmte Figur $k = 1$ werden läßt. Damit wird k dimensionslos und nimmt für andere Figuren bestimmte absolute Zahlwerte an.

Diese Betrachtung ist derjenigen genau analog, die dazu geführt hat, die Einheit der Elektrizitätsmenge durch das Coulombsche Gesetz der Anziehung ungleichnamiger und der Abstoßung gleichnamiger Elektrizitäten auf die Einheit der Masse, Länge und Zeit zu beziehen. Nimmt man die Einheit der Elektrizitätsmenge zunächst unabhängig an, so wird, wenn e, e' die Maßzahlen zweier punktförmigen Elektrizitätsmengen und r die Maßzahl ihrer Entfernung bedeutet,

$$\frac{ee'}{r^2}$$

der Kraft proportional, mit der sie aufeinander wirken. Ist K die Maßzahl der Kraft, so ist demnach

$$\frac{ee'}{r^2} = \varepsilon K,$$

wo ε die Dimension hat Elektrizitätsmenge zum Quadrat durch das Produkt Länge mal Länge mal Kraft. ε mißt eine physikalische Eigenschaft des Mediums, in dem die Anziehung oder Abstoßung vor sich geht. Es ist nun üblich, die Einheit der Elektrizitätsmenge dadurch auf

1) So würde man z. B. sagen können: die flächenbildende Eigenschaft einer Länge ist als Radius eines Kreises π mal größer, denn als Seite eines Quadrats.

die der Kraft und Länge zu beziehen, daß man für den freien Äther $\varepsilon = 1$ festsetzt. Dadurch wird ε dimensionslos und jedem ponderablen nichtleitenden Medium kommt ein bestimmter Zahlenwert ε, seine „Dielektrizitätskonstante", zu. Die Elektrizitätsmenge erhält durch diese Festsetzung die Dimension Wurzel aus Kraft mal Längequadrat.

Ob es sich empfiehlt, so zu verfahren, das ist eine andere Frage. Die Elektrizität ruft bei ihrer Bewegung auch noch andere Kräfte hervor, die von jenen Anziehungs- und Abstoßungskräften ganz unabhängig sind. Man hat dem dadurch Rechnung getragen, daß man noch eine andere Einheit der Elektrizitätsmenge eingeführt hat, die sich auf die Anziehung und Abstoßung elektrischer Ströme gründet und dadurch ganz anders mit den Einheiten der Masse, Länge und Zeit zusammenhängt, als durch das Coulombsche Gesetz. Aber zweckmäßiger ist es, auch die elektromagnetischen Erscheinungen nicht zu benutzen, um die Einheit der Elektrizität an die der Masse, Länge und Zeit zu binden, sondern sie unabhängig zu lassen. Die Einheit der magnetischen Menge wird dagegen zweckmäßig auf die Einheit der Elektrizitätsmenge bezogen. Denn nach unserer heutigen Anschauung besteht Magnetismus nur aus der Wirkung elektrischer Ströme. Eine Fläche, deren Rand ein elektrischer Strom durchfließt, hat nach außen dieselbe Wirkung, wie wenn die Fläche aus zwei magnetischen Schichten von entgegengesetzter magnetischer Dichte und konstantem sehr kleinen Abstand bestünde, d. h. wie eine Fläche von konstanter Dichte des magnetischen Moments, die dem Strom proportional ist. Da nach der heutigen Anschauung Dichte des magnetischen Moments nur auf diese Weise zustande kommt, so empfiehlt es sich, die Einheit der Dichte des magnetischen Moments an die Einheit des elektrischen Stromes zu binden und sie durch die Dichte des magnetischen Moments einer von der Einheit des elektrischen Stromes umkreisten Fläche zu definieren. Dadurch erhält die Dichte des magnetischen Momentes die Dimension Elektrizität durch Zeit, wie der elektrische Strom und demnach die magnetische Menge die Dimension Elektrizität mal Länge durch Zeit.

Die Kraft, mit der sich zwei punktförmige magnetische Mengen anziehen oder abstoßen, ist ihrem Produkt direkt und dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional

$$\frac{m_g m'_g}{r^2} = \mu K$$

(m_g, m'_g die Maßzahlen der magnetischen Mengen).

Nach dem elektromagnetischen Maßsystem bezieht man durch dieses Gesetz die Einheit der magnetischen Menge auf die der Kraft und der Länge, indem man für den freien Äther $\mu = 1$ annimmt. Damit ist dann auch die Einheit der elektrischen Menge auf die Einheiten der Masse, Länge und Zeit bezogen.

Es ist indessen aus den oben genannten Gründen besser, es nicht zu tun, sondern auch hier wie bei den Coulombschen Kräften zu verfahren und μ, die Maßzahl der Permeabilität, nicht dimensionslos zu machen. μ erhält die Dimension von $\frac{m_g^2}{Kr^2}$. Für die Dielektrizitätskonstante ε fanden wir oben die Dimension $\frac{e^2}{Kr^2}$. Demnach hat $\frac{\mu}{\varepsilon}$ die Dimension $\frac{m_g^2}{e^2}$, und da m_g die Dimension von $\frac{el}{t}$ hat, so ergibt sich für μ/ε die Dimension $\frac{l^2}{t^2}$ des Quadrats einer Geschwindigkeit.

Die Maxwellschen Gleichungen lauten dann für Medien von derselben Permeabilität wie der freie Äther

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathfrak{E} \text{ und } \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

so daß $\frac{\mu}{\varepsilon}$ das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit in dem Medium ist.

In physikalischen Gleichungen ist es üblich, Winkel als dimensionslos zu betrachten. Das hat seinen Grund darin, daß überall, wo irgendein Winkel in einer physikalischen Beziehung eine Rolle spielt und durch seine auf irgendeine Einheit bezogene Maßzahl gegeben ist, auch die Maßzahl eines Winkels von 180^0 in derselben Einheit als gegeben betrachtet werden kann. Wenn aber zwei Winkel in der physikalischen Relation vorkommen, so kann man statt des einen das Verhältnis beider einführen und hat damit eine dimensionslose Größe, in der der Winkel vorkommt. Daher ist gar kein Vorteil für etwaige Dimensionsbetrachtungen damit verbunden, daß man die Einheit des Winkels sich vorbehält. Wenn man aber die Einheit durch die ganze Untersuchung festhält, so kann man die Maßzahl geradeso ansehen, als ob sie eine absolute Zahl wäre.

Man betrachte z. B. den Zusammenhang zwischen der Fläche eines sphärischen Dreiecks, dem Radius der Kugel und den drei Winkeln des sphärischen Dreiecks. Was läßt sich aus der Betrachtung der Dimensionen darüber sagen?

Seien $F, r, \alpha, \beta, \gamma$ die Maßzahlen. Dann ist auch die Maßzahl δ eines Winkels von 180^0 bestimmt. Nach der oben auseinandergesetzten Schlußweise folgt dann, daß die dimensionslose Größe $\frac{F}{r^2}$ eine Funktion der drei dimensionslosen Größen $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$ sein muß. In der Tat ist ja bekanntlich

$$\frac{F}{r^2} = \pi\left(\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} - 1\right).$$

Denken wir uns die Einheit der Winkel festgehalten und die Maßzahlen der Winkel als ob es absolute Zahlen wären, so wären wir zu dem gleichen Resultat gekommen, daß $\frac{F}{r^2}$ eine Funktion der drei Winkel sein muß. Es gewährt daher für Dimensionsbetrachtungen keinen Vorteil, die Einheit der Winkel veränderlich zu lassen.

§ 4.

Allen obigen Betrachtungen haben wir die Annahme zugrunde gelegt, daß die Maßzahl einer physikalischen Größe auf eine bestimmte Einheit bezogen sei, bei deren Änderung sie sich umgekehrt proportional der Einheit ändert. Die physikalischen Schriftsteller sind aber in einem Falle von dieser hergebrachten Art der Messung abgewichen und haben physikalische Gleichungen aufgestellt, bei denen die Dimensionsgesetze, so wie Fourier sie ausgesprochen hat, nicht erfüllt sind.

Betrachten wir z. B. die Gleichung zwischen der Maßzahl f der Fläche eines Kreises und der Maßzahl r des Radius

$$f = r^2\pi$$

und bilden wir aus dieser Gleichung eine neue Gleichung, dadurch daß wir auf beiden Seiten den Logarithmus nehmen

$$\log f = 2\log r + \log\pi,$$

so ist dies ohne Zweifel eine richtige Gleichung. Sie unterscheidet sich aber von der gewöhnlichen Form physikalischer Gleichungen insofern, als die Terme $\log f$ und $2\log r$ in dem hergebrachten Sinne nicht mehr Maßzahlen physikalischer Größen sind; denn sie ändern sich bei Änderung der Längeneinheit nicht um einen Faktor, sondern um eine additive Konstante. Die Gleichung erfüllt allerdings insofern auch die Fouriersche Forderung, daß sie bei Änderung der Einheiten richtig bleibt. Allein sie unterscheidet sich dadurch, daß bei Änderung der Längeneinheit nicht ein Faktor auftritt, sondern daß auf beiden Seiten die additive Konstante hinzutritt, die sich dann weghebt. Bei den Maßzahlen der Fläche und Länge ist es nun allerdings nicht üblich, der Gleichung diese Form zu geben. Bei der Einführung des Begriffes der Entropie dagegen haben die Physiker in der Tat den Logarithmus der Maßzahl einer physikalischen Größe eingeführt. Sie bezeichnen den Logarithmus mit einem Buchstaben S und erwecken damit in der physikalischen Gleichung leicht die Vorstellung, als ob S sich auch wie die andern in der Gleichung vorkommenden Maßzahlen auf eine bestimmte Einheit bezöge. So schreibt z. B. Planck (Thermodynamik § 119, Gl. (52)), für die Entropie eines idealen Gases

$$S = M\left(c_v\log\vartheta + \frac{R}{m}\log v + \text{const.}\right).$$

Der Term $M\frac{R}{m}\log v$ z. B. ist keine physikalische Größe in dem von Fourier gedachten Sinne. Man kann ihm weder eine Dimension zuschreiben, noch kann man ihn dimensionslos nennen. Denn bei Änderung der Längeneinheit ändert er sich nicht um einen Faktor, sondern um eine additiv hinzutretende Größe.

Bei dem Term $Mc_v\log\vartheta$ liegt die Sache noch verwickelter, so lange man die Einheit der absoluten Temperatur noch unabhängig gelassen hat. Denn Mc_v ist die Energiemenge, die man hinzufügen muß, um die absolute Temperatur um eine Einheit zu steigern. Bei einer Änderung der Einheit der Temperatur tritt demnach zu Mc_v ein Faktor hinzu und gleichzeitig zu $\log\vartheta$ eine additive Größe.

Die Fourierschen Begriffe können dagegen vollständig aufrecht erhalten werden, wenn die absolute Temperatur wie oben durch die Energie $\frac{pv}{N} = \vartheta$ definiert wird. Ist U die Gesamtenergie des Gases, so ist, wenn ihm die Energiemenge dQ zugeführt wird,

$$dQ = dU + p\,dv.$$

Wenn die Energie nur in der translatorischen Energie steckt, so ist

$$U = \frac{3}{2}N\vartheta,$$

im andern Fall tritt statt $\frac{3}{2}$ ein größerer Wert ein. Wir wollen den ersten Fall allein betrachten.

Dann ist also

$$dQ = \frac{3}{2}N\,d\vartheta + N\vartheta\frac{dv}{v}.$$

Durch ϑ dividiert, ergibt dies ein vollständiges Differential

$$\frac{dQ}{\vartheta} = \frac{3}{2} N \frac{d\vartheta}{\vartheta} + N \frac{dv}{v} = d\left(\frac{3}{2} N \log \vartheta + N \log v\right)$$

dem Differential des Logarithmus von $\vartheta^{\frac{3}{2}N} v^N$. Diese Größe $\vartheta^{\frac{3}{2}N} v^N$, deren Logarithmus bis auf eine hinzutretende willkürliche Konstante mit dem übereinstimmt, was man die Entropie des einatomigen idealen Gases zu nennen pflegt[1]), ist nun in der Tat eine physikalische Größe in dem alten Fourierschen Sinne, die in einer bestimmten auf Länge, Masse und Zeit bezogenen Einheit gemessen werden kann. Auch durch die Betrachtungen der statistischen Mechanik wird man zunächst auf diese im Fourierschen Sinne physikalische Größe geführt, die der Wahrscheinlichkeit der Geschwindigkeits- und Raumverteilung der Moleküle bei gegebenem ϑ und v proportional ist. Daß man dann den Logarithmus ihrer Maßzahl betrachtet, anstatt ihre Maßzahl selbst, kann als eine rein rechnerische Operation gelten.

1) Dabei ist nur davon abgesehen, daß in dem Ausdruck $\frac{dQ}{\vartheta}$ gewöhnlich die absolute Temperatur nicht durch die Einheit der Energie gemessen ist. Bezeichnet T die Anzahl der Grade Celsius, so ist

$$\frac{1}{k}\frac{dQ}{T} = \frac{dQ}{\vartheta} \cdot (k = 1{,}347 \cdot 10^{-16}\,\text{erg}).$$

(Eingegangen 17. April 1916.)

BESPRECHUNGEN.

M. Born, Dynamik der Kristallgitter. Fortschritte der math. Wiss. in Monographien. Bd. 4. gr. 8°. VII u. 122 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1915. Preis geh. M. 7.—, geb. M. 7.60.

Die Vorstellung von dem regelmäßigen Aufbau der Kristalle ist den Physikern seit den Zeiten Poissons und Bravais' bekannt; aber erst die Forschung der letzten Jahre hat dieser Spekulation einen solchen Grad von Wirklichkeit gegeben, daß wir die Existenz der Raumgitter von Atomen als die gesicherte Basis für jede weitere Forschung über Kristalle zugrundelegen können. Es sei daran erinnert, wie Madelungs und Habers, Born-Kármáns und andere Untersuchungen, die von der primitivsten Raumgittervorstellung ausgingen, durch ihre Erfolge das Vertrauen zu der Grundannahme so zu stärken vermochten, daß als Ausfluß einer festen Überzeugung das Experiment von Laue und seinen Mitarbeitern zustandekam.

In dem Maße, wie durch die Forschung mit Röntgenstrahlen die spezielle Kenntnis einzelner Kristalle zunimmt, macht sich das Bedürfnis nach einer Theorie fühlbar, die den Weg zu all den Einzelproblemen weist, die bei der Erklärung der physikalischen Eigenschaften aus der Struktur auftreten. Welches sind die mit der Struktur unmittelbar zusammenhängenden Eigenschaften? Wie läßt sich im Prinzip der Einfluß eines beliebig komplizierten Gitters ermitteln?

Dies sind Fragen, die Born in der Dynamik der Kristallgitter beantworten will. Grundsätzlich knüpft er die Untersuchung an das allgemeinste Gitter an, aus dem die höher symmetrischen Gitter durch Einschränkung erhalten werden. Dieses allgemeinste Gitter setzt sich aus beliebig vielen kongruenten gegeneinander verschobenen „einfachen" Gittern zusammen, unter einfachem Gitter die Gesamtheit aller gleichen Partikel — Atome, Atomkerne oder Elektronen — verstanden, die die Schnittpunkte von drei Scharen paralleler äquidistanter Ebenen besetzen. Die Anfangspunkte der einfachen Gitter, deren Lage die gegenseitige Verschiebung der Gitter bestimmt, nennt Born die Basisgruppe. Grundsätzlich werden die Elektronen als Bestandteile des Kristalls angesehen, die mit den Atomen bzw. positiv geladenen Atomkernen gleichberechtigt sind und sich der Gitterordnung fügen.

Das große Interesse, das das Bornsche Buch verdient, wird am besten durch eine gedrängte Übersicht über die wichtigsten Ergebnisse dargetan werden. Im Anschluß an Born mögen die Kapitel Elastizität, Piezoelektrizität, spez. Wärme, Reststrahlen, Dispersion, Doppelbrechung und optische Aktivität besprochen werden.

1. Elastizität. Gerade die Ableitung der elastischen Eigenschaften eines Raumgitters hat früher am meisten dazu beigetragen, den Glauben an den regelmäßigen Gitteraufbau zu erschüttern. Es ergab sich aus den alten Theorien, daß bei konservativen Atomkräften die sechs Cauchyschen Relationen zwischen den elastischen Konstanten bestehen müssen, die die Zahl der unabhängigen Konstanten von 21 auf 15 herabdrücken — was den Beobachtungen von Voigt widerspricht. Man erinnert sich, wie Voigt glaubte, die Gitterannahme wahren zu können, indem er Drehmomente zwischen den Atomen einführte — eine Annahme, die sich nie großer Beliebtheit erfreut hat.

Es ist klar, daß sich Born zunächst endgültig mit dieser Frage auseinandersetzen muß. Dies geschieht in befriedigendster Weise, indem die Ungültigkeit der Cauchyschen Relationen selbst bei konservativen Zentralkräften zwischen den Atomen bewiesen wird. (Über die Atomkräfte wird überhaupt in dem ganzen Buch keine weitere Annahme gemacht, als daß ein elastisches Potential existiert.)

Der Gedankengang bei Born ist etwa so: Es gibt unter den Verzerrungen, die das Raumgitter erleiden kann, zwei besonders wichtige Arten. Bei der ersten wird das Raumgitter dadurch abgeändert, daß das Grundparallelogramm verzogen wird, und mit ihm das ganze Gitter. Diese Verzerrung ist beim einfachen Gitter die einzig mögliche. Beim zweiten Typus, der nur im zusammengesetzten Gitter auftreten kann, bleibt das Grundparallelogramm unverzerrt, aber die Versetzung der einzelnen einfachen Gitter, also die Basisgruppe des Gitters, wird geändert. Die allgemeine homogene Verzerrung setzt sich aus beiden Arten von Verzerrung zusammen. Entsprechend besteht die potentielle Energie des allgemeinen Gitters aus drei Teilen, die je durch die Deformation der einfachen Gitter, durch die hinzutretende Deformation der Basisgruppe und durch eine Wechselwirkung beider Verzerrungsarten entstehen.

Nur der erste Teil der potentiellen Energie wurde in der alten atomistischen Theorie berücksichtigt, die

die Betrachtung an ein einfaches Gitter anknüpfte, und die Folge war die zu geringe Zahl von elastischen Konstanten (15 statt 21). Die hinzutretenden Teile der potentiellen Energie erhöhen die Anzahl gerade um 6. Diese Klarstellung ist das erste schöne Ergebnis der Durchführung der Rechnung an dem zusammengesetzten Gitter.

2. Piezoelektrizität. Befinden sich in den Gitterpunkten positive und negative Ladungen, so wird im allgemeinen eine gewisse Polarisation pro Volumeinheit bestehen. Im unverzerrten Kristall ist diese durch eine angesammelte Oberflächenladung nach außen hin kompensiert. Bei solchen Verzerrungen aber, bei denen eine Verschiebung der einfachen Gitter gegeneinander stattfindet, tritt eine Änderung dieses Momentes ein, die als piezoelektrische Erregung wahrgenommen wird. Die Formeln geben den Zusammenhang der phänomenologisch eingeführten piezoelektrischen Koeffizienten mit dem elastischen Potential.

3. Die mechanischen Eigenschwingungen. Die nächsten Kapitel sind den Schwingungszuständen des Gitters gewidmet. Born bedient sich einer fruchtbaren, mit dieser Konsequenz auf physikalische Probleme zum erstenmal von Hilbert angewandten Methode der Reihenentwicklung der Ausgangsgleichung, bei der die Lösung als Potenzreihe nach $a\lambda$ erscheint, so daß die einzelnen Glieder immer mehr den Einfluß der atomaren Struktur berücksichtigen (a = ein Gitterabstand, λ = Wellenlänge der Schwingung). Die durchgehende Anwendung dieser Methode verleiht den Rechnungen etwas sehr Systematisches und Einheitliches.

Das neue Ergebnis des Abschnittes über Eigenschwingungen sind Sätze über das elastische Spektrum eines Kristalles, die die Grundlage liefern sowohl für das thermische Verhalten des Gitters (Energieinhalt der freien Schwingungen), wie über sein Verhalten bei erzwungenen Schwingungen (Theorie der Reststrahlen).

4. Spezifische Wärme. In dem Kapitel über spezif. Wärme wird die auf Grund der gewonnenen Sätze sofort hinzuschreibende Formel diskutiert. Es zeigt sich, daß die beste Darstellung der spez. Wärme eine Summe von Termen ist, die teils den Charakter der von Debye, teils die Form der von Einstein angegebenen Funktion haben — eine Vermutung, die auf Grund der experimentellen Kurven schon von Nernst auf dem Kongreß in Göttingen ausgesprochen worden ist.

5. Reststrahlen und Kristalloptik. Streng genommen ist für die Behandlung der Optik eines Gitters Rücksicht zu nehmen auf die elektrodynamischen Wirkungen der schwingenden Ladungen aufeinander. Dieser Standpunkt, der dem Lorentz-Planckschen Standpunkt der Dispersionstheorie entspricht, wird von Born in den späteren Kapiteln über die Elektrodynamik des Gitters eingenommen. Ihnen schickt er eine einfache in Drudeschem Sinne geführte Ableitung der formalen Kristalloptik und Dispersionsformel voraus, in dem die von einer einfallenden optischen Welle erzwungenen mechanischen Schwingungen (und mit ihnen die Polarisation und die Dielektrizitätskonstante) auf Grund der Kenntnis der freien Schwingungen des Gitters untersucht werden. Wichtige Sätze über das Verhalten im Ultraroten werden gewonnen. Die Anzahl der Reststrahlfrequenzen (= Stellen, an denen der Brechungsindex unendlich wird) steht im engsten Zusammenhang mit der Kompliziertheit der Gitterstruktur: sie ist höchstens gleich 3 ($p-1$), unter p die Anzahl der einfachen Gitter verstanden, aus denen das Gitter aufgebaut ist.

6. Doppelbrechung und Dispersion. Die Vertiefung der Betrachtungsweise für die Kristalloptik setzt ein näheres Eingehen auf das elektrische Feld voraus, das durch die schwingenden Ladungen selbst erzeugt wird. Diesem Felde werden durch die Periodizität des Kristalls periodische Eigenschaften aufgezwungen, die zu seiner Berechnung in eleganter Weise benutzt werden. Wieder entsteht eine Reihenentwicklung von ähnlicher Art, wie für die mechanischen Schwingungen. Aus dem Grundglied und der ersten Näherung folgen das Fresnelsche Gesetz über die Abhängigkeit der Lichtfortpflanzung von der Richtung und die Dispersionsformel. Wesentlich an der Betrachtungsweise ist die gleichzeitige Erledigung des elektrodynamischen und des mechanischen Problems: während in der alten Dispersionstheorie die schwingungsfähigen Elektronen an feste Ruhelagen gebunden erschienen, kennt die Bornsche Theorie nur Bindungen der Ladungen (bzw. geladene Atomkerne) untereinander und deshalb ist der elektrische Schwingungszustand von dem mechanischen gar nicht getrennt zu behandeln. So ist die Kenntnis der Mechanik des Gitters die notwendige Vorbereitung zu der tieferen Betrachtungsweise, die die innige Wechselwirkung zwischen Mechanik und Elektrodynamik voll durchführt. Auch die Theorie der Piezoelektrizität findet die endgültige Behandlung erst an dieser Stelle.

7. Optische Aktivität. Ein besonderer Vorzug der von Born befolgten Annäherungsmethode ist die zwanglose Einreihung der optischen Aktivität in das Schema der allgemeinen Lösung. Die Drehung der Polarisationsebene wird durch die Näherung II. Ordnung erhalten, in dem einzigen Falle, wo die vorhergehende Näherung zu keinem eindeutigen Ergebnis führt. Dies ist so zu verstehen: für gewöhnlich gibt die erste Näherung eine feste Zuordnung zwischen der Fortpflanzungsrichtung eines Strahles und den beiden Polarisationsrichtungen, unter denen lineare Schwingungen allein stattfinden können und für die es daher einheitliche Brechungsexponenten gibt. Bei der Ausbreitung längs der optischen Achse findet diese Bestimmung in der ersten Näherung nicht statt und man muß die zweite Näherung zuziehen. Diese liefert einmal kleine Zusatzterme zu dem in erster Näherung erhaltenen Wert des Brechungsindex und zweitens eine Beziehung zwischen diesen Zusatztermen und der Art der Polarisation. Dies führt hier zu dem Ergebnis, daß einheitliche Brechungsindizes nur für rechts- und linkszirkular polarisierte Schwingungen existieren, wodurch in bekannter Weise die Drehung der Polarisationsebene erklärt ist. (Vgl. hierzu diese Zeitschr. 16, 437, 1915.)

Dieser Überblick über Borns Resultate möge genügen. Born selbst nennt seine Arbeit eine Vorarbeit für eine tiefere Auffassung des Kristalls, die über die uns heute bekannten geometrischen Zusammenhänge hinaus die dynamischen Bedingungen des Kristalls und der Atomkräfte erfaßt, wie es bei Atom und Molekül mit Erfolg erstrebt wird. Aber auch ohne diesen weiten Ausblick bietet das Buch, was Ergebnisse wie Form betrifft, volle Befriedigung und reiche Anregung.

Ein Wort der Anerkennung für den Teubnerschen Verlag, der den an sich nicht leichten und durch die Umstände erschwerten Druck besorgt hat, darf hier nicht fehlen. P. P. Ewald.

Handbuch der Radiologie. Herausgegeben von Erich Marx. gr. 8°. Band III[1]), enthaltend: E. Gehrcke, Glimmentladung. R. Seeliger, Die positive Säule. W. Hallwachs,

1) Besprechung von Band II, durch Rümelin, diese Zeitschr. 15, 261, 1914.

Die Lichtelektrizität. — Mit einem Anhang: Die Entwicklung der Lichtelektrizität von Januar 1914 bis Oktober 1915 von E. Marx. XXII u. 619 S. mit 140 Figuren und Abbildungen im Text. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1916. Geheftet M. 34.—.

Erfreulicherweise ist dieser dritte Band des verdienstvollen Marxschen Unternehmens trotz des Krieges erschienen. Er bildet ein überaus wertvolles Hilfsmittel sowohl zum Einarbeiten als zum Nachschlagen. Gerade diese Art zusammenfassender Darstellungen ist bestens geeignet dem praktischen Physiker Zeit zu ersparen und die Wege zu ebnen.

Die ersten 240 Seiten sind der Glimmentladung und der positiven Säule gewidmet. Auf eine im wesentlichen mit den ersten beiden Kapiteln des bekannten vorzüglichen Buches von Gehrcke[1]): Die Strahlen der positiven Elektrizität, Leipzig, Hirzel 1909, übereinstimmenden Einleitung Gehrckes über allgemeine Eigenschaften und Nomenklatur, folgt der von R. Seeliger verfaßte Abschnitt: Die geschichtete und die ungeschichtete positive Säule. Seine klar disponierte Darstellung (geometrische, elektrische, energetische und theoretische Behandlung) verschafft einen guten Überblick über die verwickelten und bekanntlich vielfach noch ungenügend geklärten Erscheinungen. Dabei hat der Verfasser sehr geschickt die Übersichtlichkeit dadurch zu erhöhen gewußt, daß er möglichst die gleiche oben genannte Einteilung getrennt für die ungeschichtete und geschichtete Säule verwendet. Die Literatur vor 1900 ist in Rücksicht auf das Buch von J. Stark: Elektrizitätsdurchgang in Gasen (Leipzig 1902) nicht ausführlich angemerkt worden, sondern dies ist erst von 1900 an geschehen, bis 1914 soweit irgend angängig. Gerade bei diesem Stoffe interessiert vielleicht eine nähere Inhaltsangabe. — I. Ungeschichtete Säule: Nach einem Abschnitte, welcher die Entladung in Abhängigkeit von den geometrischen Verhältnissen beschreibt, wird der Potentialgradient ausführlich behandelt: Meßmethoden, räumliche Verteilung, Abhängigkeit von Stromdichte, Druck und Temperatur; ferner die Leitfähigkeit, ihr Zusammenhang mit Stromdichte, Druck und Rohrdimension sowie ihre Messung und die Geschwindigkeit der Ionen. Die Energetik der ungeschichteten Säule geht auf die spektralen Verhältnisse ein, behandelt die Abhängigkeit der Intensität der Strahlung von den Entladungsbedingungen (Stromstärke, Wattverbrauch, Druck), die spektrale Intensitätsverteilung und die Temperaturverhältnisse der Säule; Gebiete, die zum Teil noch wenig bearbeitet erscheinen. Die theoretische Betrachtung erwähnt auch neuere Arbeiten: Franck und Hertz, Seeliger, Holm (1915). II. Geschichtete Säule: die Bedingungen für das Zustandekommen der Schichten werden sorgfältig und klar referiert (Entladungsart, Röhrenform, Gas, Temperatur, Magnetfeld, Stromstärke, Druck), sodann werden die geometrischen Verhältnisse in analoger Folge diskutiert. Die Erörterung der elektrischen Eigenschaften ist entsprechend I. angelegt. — Mechanismus der geschichteten Säule und Theorie bilden einen kritisch anregenden Schlußabschnitt dieser Darstellung, welche erkennen läßt ein wie großes und dankbares Arbeitsfeld hier noch vorliegt. —

Das nun folgende Kapitel von Gehrcke, Erscheinungen der Glimmentladung an den Elektroden, behandelt: I. Kathodisches Glimmlicht, kathodischer Dunkelraum und Kanalstrahlenlicht auf der Kathode (sogen. dritte, zweite und erste Schicht), II. die elektrischen Messungen in den kathodischen Lichtgebilden und die Theorie des Dunkelraumes und des Glimmlichts, III. den Faradayschen Dunkelraum und die anodischen Lichtgebilde, IV. thermische und mechanische Eigenschaften der Elektroden mit ihrer Nachbarschaft. Die Darstellung ist gut unterstützt durch Tabellen, Kurven und Figuren und zeichnet sich überhaupt durch Übersichtlichkeit aus. Unter I findet sich übrigens auch ein Abschnitt über technische Anwendungen des Glimmlichts.

Den zweiten, umfangreicheren Teil des Bandes bildet „Die Lichtelektrizität". Hierfür Herrn Hallwachs gewonnen zu haben ist ein besonderes Verdienst des Herausgebers. Der weitverzweigte Stoff ist mit hervorragendem Geschick und einer originellen Frische dargestellt, die wohl nur von dem Manne ausgehen konnte, der so eng mit dem Gebiete verknüpft ist. „Von der Anschauung ausgehend, daß eine rein systematische Darstellung des Stoffes in einem werdenden Gebiete zu leblos und eine rein historische zu unübersichtlich wäre, hat der Verfasser eine mittlere Linie zwischen beiden gesucht." Man braucht nur die Figuren 1 und 2 Seite 249 und 250 zum Grundversuche der lichtelektrischen Entladung und Erregung anzusehen bei welchen im einen Falle das Elektroskop, im anderen der eiserne Schutzkasten mit dem Tage der Hallwachsschen Entdeckung versehen ist (27. XI. 87 u. 18. XII. 87) um einen Eindruck zu bekommen, mit welcher Forscherfreude der ganze Bericht abgefaßt ist! Zur Einarbeitung in das Gebiet steht hier ein außergewöhnlich vorteilhaftes Werk zur Verfügung. Die beiden ersten Kapitel bringen die Entwicklung des Gebietes bis 1899. Nach dem Bericht über die Grundversuche wird in systematischer Folge, bei der man die Entdeckungsgeschichte förmlich miterlebt, vor Augen geführt: die Abhängigkeit der Wirkung von den Eigenschaften des Lichtes, vom belichteten Körper, dem elektrischen Felde und von dem Gase. Dann folgen Ergebnisse von Eigenschaften der Strömung im Gas für die Lichtelektrizität und Besprechung des Einflusses äußerer Kräfte und der Temperatur, sowie die Zurückführung der Hertzschen Funkenbeeinflussung auf Lichtelektrizität.

Bis hierher ist von Elektronen noch nicht die Rede, sondern es handelt sich nur um die Beschreibung des Zusammenhanges der Erscheinungen. Dann aber folgt im dritten Kapitel durch eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser ersten Periode die Bestimmung der lichtelektrischen Problemstellung, und dies führt zu einer eingehenden Besprechung der für das Weitere grundlegenden Arbeit von P. Lenard, Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht, Wien. Ber. 108, 1649—1666, 1899, welche die Lichtelektrizität als Elektronenstrahlung aufzufassen gelehrt hat.

Nach Gewinnung dieses Leitgedankens der späteren Arbeiten gibt Kapitel IV eine Einleitung in die Forschungsergebnisse seit 1900 wonach die „eigentliche lichtelektrische Frage" ist: „Wie geht die direkte Wirkung des Lichtes von dessen Absorption bis zur Abspaltung des Elektronen vor sich?" Einer für den Anfänger wichtigen Festlegung der Terminologie folgt eine Darlegung des Fortleitungsprozesses der ausgelösten Lichtelektrizität in dem Gase. Dieses hier, prinzipiell, anzuschließende große Gebiet der Gasleitung ist in Rücksicht auf Band I nur kurz behandelt. Es werden sodann die Meßmethoden der lichtelektrischen Elektronenstrahlung und ihre Fehlerquellen erörtert; dann findet man behandelt: Erstenergien sowie ionisierende Wirkung, freie Weglänge und Absorption der lichtelektrischen Elektronen; lichtelektrische Kanalstrahlen. Der nächste Abschnitt bringt die „Abhängig-

1) Besprechung diese Zeitschr. 10, 1159, 1909.

keit der primären Endprodukte des lichtelektrischen Prozesses von den Eigenschaften des Lichtes und der Umgebung". Stärke des Lichtes, Absorption, Wellenlänge, Polarisationszustand und Einfallswinkel gelangen zur Besprechung und namentlich auch der selektive Photoeffekt wird eingehend beschrieben; ferner: Longitudinalwirkungsfrage, Eindringtiefe und deren Beziehung zur Temperatur. Auf die einzelnen Körperklassen und Substanzen geht Kapitel VII ein. Nach Behandlung der Gase widmet sich der Verfasser eingehend den Metallen: nächst den einzelnen Effekten gelangen die Beziehungen zu anderen physikalischen Parametern, sowie die lichtelektrische Ermüdung, der Einfluß der Gase und die speziellen Oberflächenprozesse zur Darlegung. Auch Flüssigkeiten und Lösungen sowie verschiedene Metallverbindungen, Nichtleiter und anderes finden hier Beachtung.

Sehr willkommen ist ein Abschnitt „Besondere lichtelektrische Erscheinungen und Nachbargebiete der Lichtelektrizität". Phosphoreszenz und Fluoreszenz, namentlich die bedeutsamen neueren Arbeiten von Lenard und Mitarbeitern, welche zu engem Zusammenhang mit lichtelektrischen Vorgängen geführt haben, findet man hier behandelt; auch über Leitfähigkeitsänderung, photochemische Prozesse, aktinodielektrische Wirkungen (Lenard), Elektronenerzeugung bei chemischen Prozessen u. a. kann man sich orientieren.

Eine beachtenswerte und anregende Zusammenstellung theoretischer Arbeiten bringt das 9. Kapitel: „Über den lichtelektrischen Grundprozeß, Versuch einer speziellen Deutung der lichtelektrischen Vorgänge", welches jedem Physiker, der sich für Atommodelle und damit verbundene Fragen interessiert, willkommen sein dürfte.

Die „praktische Lichtelektrizität" endlich bezieht sich sowohl auf die experimentellen Hilfsmittel als auf Anwendungen und ist sehr beachtenswert.

Äußere Umstände haben es mit sich gebracht, daß in einem umfangreichen Nachtrage lichtelektrische Arbeiten vom 31. VII. 1913 bis Ende 1913 und sonstige Ergänzungen zusammengestellt sind (von Hallwachs), sowie daß Herr Marx selbst in einem Anhang die Entwicklung der Lichtelektrizität von Januar 1914 bis Oktober 1915 referiert hat. (Hier sind z. B. auch die Arbeiten von Fredenhagen, Küstner und Germershausen noch erwähnt.) Da der Zusammenhang mit dem Vorhergehenden durch Hinweise gut hergestellt ist, so kann man das kaum als Nachteil bezeichnen: es hat sogar den Vorteil, die neuesten Forschungsinteressen besser hervortreten zu lassen. — Schließlich sei auf die vorzügliche Literaturübersicht am Ende des Buches sowie die sorgfältigen Register hingewiesen.

H. Hörig.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden. gr. 8°. Leipzig, B. G. Teubner.

Band 5_3, Heft 3: M. v. Laue, Wellenoptik. Mit einem Beitrag über spezielle Beugungsprobleme von P. S. Epstein. 167 S. 1915. M. 5.20.

Der Artikel von M. v. Laue behandelt das Gebiet in 5 Abschnitten (I. Einleitung; II. Superposition von Sinusschwingungen von gleicher Frequenz; III. Superposition von Sinusschwingungen ungleicher Frequenz; Spektrum; Beziehungen zur Thermodynamik; IV. Allgemeine Theorie der Beugung; V. Interferenzerscheinungen an Röntgenstrahlen), deren Überschriften die Gliederung des Stoffes erkennen lassen. In der Einleitung wird besonders der Frage nach der Definition der Intensität, über die man meistens vielsagend schweigt, die gebührende Aufmerksamkeit geschenkt, auch ein wichtiger Zusammenhang mit der Definition der Planckschen natürlichen Strahlung hervorgehoben. Im Abschnitt II werden zunächst die einfachsten Interferenzerscheinungen behandelt (Newtonsche Ringe, Fresnelscher Spiegel, bei letzterem besonders interessant und wichtig, weil durch keine Beugungserscheinung gestört, die Anordnung von Righi), Kurven gleicher Neigung an planparallelen Platten, die durch ihre Beziehung zum V. Abschnitt wichtigen Quetelet'schen Ringe, das Michelsonsche Interferometer, Beugungsgitter und Stufengitter, schließlich auch einige Angaben über Interferenz elektrischer Wellen, die freilich etwas lückenhaft sind.

Der Abschnitt III bespricht zunächst die Lichtschwebungen, das Auflösungsvermögen, homogene und natürliche Strahlung, spektrale Zerlegung; bei Kohärenz und Inkohärenz spielt die Thermodynamik herein, was im Anschluß an eine bekannte Arbeit des Verfassers behandelt wird. Schließlich werden Michelsons Arbeiten über die „Sichtbarkeitskurven" diskutiert, wobei ich den Hinweis auf eine wichtige Arbeit von J. Koch vermißt habe, der eine solche zuerst bolometrisch aufgenommen hat.

Im IV. Abschnitt behandelt v. Laue zuerst das elementare Huygenssche Prinzip, dann dessen exakte Formulierung durch Kirchhoff, schließlich eine Reihe von einfachen Beugungserscheinungen; dann folgt die Lehre von der Abbildung im Sinne der Wellenlehre und, im Anschluß an eine jüngere Arbeit v. Laues, die Erörterung des Problems der Freiheitsgrade optischer Vorgänge.

Das V. Kapitel behandelt in Anlehnung an des Verfassers berühmte Arbeiten die Interferenz der Röntgenstrahlen, die derartig bekannt sind, daß hier ein genaueres Eingehen sich erübrigt.

Die Darstellung ist kurz und klar, hebt überall das Wesentliche hervor und stellt somit eine wertvolle Bereicherung der physikalischen und mathematischen Literatur vor, für die wir dem Verfasser zu Dank verpflichtet sind.

Nicht auf derselben Höhe steht der Anhang über spezielle Beugungsprobleme von Epstein, der als Ergänzung zum Laueschen Abschnitt IV gedacht ist. Die Darstellung hätte meines Erachtens durch eine intensivere Berücksichtigung und Zitierung der Literatur nicht unerheblich gewinnen können. Da es sich hier um ein Gebiet handelt, auf dem ich selbst gearbeitet habe, so sei es mir gestattet, dieses Urteil kurz zu begründen. Es handelt sich im Epsteinschen Artikel nicht um angenäherte Lösungen des Beugungsproblems nach der Kirchhoffschen Formel, sondern um strenge Lösungen der Maxwellschen Gleichungen nebst zugehörigen Randbedingungen. Mit Recht ist der größte Raum den Arbeiten Sommerfelds (und seiner Nachfolger) über die Beugung an einer absolut blanken Halbebene (usw.) eingeräumt, da diese Methode mathematisch das größte Interesse bietet; dann folgen die mittels der Methode der krummlinigen Koordinaten gelösten Probleme (Kreiszylinder, elliptischer Zylinder, parabolischer Zylinder, Kugel). Bezüglich der Beugung am dielektrischen Kreiszylinder wird allerdings auf eine Arbeit von Schaefer hingewiesen; aber das ist nur eine vorläufige Mitteilung, und die aus-

führliche Arbeit nebst experimentellen Belegen von Schaefer und Großmann wird nicht genannt. Auch fehlt jeder Hinweis darauf, daß gerade der dielektrische Zylinder Besonderheiten zeigt, die dem metallischen fehlen. Bei Besprechung der Kugel in Anlehnung an Arbeiten von Mie und Debye wird die Farbe kolloidaler Lösungen besprochen; hier wäre m. E. der Ort gewesen, einmal die Begriffe „Resonanz", „Beugung", „Reflexion", die in der Literatur vielfach in unklarem Gegensatze zueinander gebraucht werden, gegeneinander abzugrenzen, wobei das eigentliche Problem schärfer hervorgetreten wäre; der Name Pockels, der zuerst die Verhältnisse klar erkannt hat, fehlt hier leider vollständig. Eine (nicht ausreichende) Arbeit von Maxwell-Garnett wird genannt, die wichtige Untersuchung von Gans und Happel dagegen nicht erwähnt, ebensowenig wie die analoge Untersuchung für ein aus Zylindern bestehendes Medium von Schaefer und Stallwitz. Schließlich wird noch die polarisierende Wirkung von Gittern behandelt. Dabei werden als Literatur zum Hertzschen Gitter zwei Arbeiten von J. J. Thomson und H. Lamb gegeben, dagegen fehlt wieder der Hinweis auf die experimentellen Untersuchungen von Godfrey H. Thomson und Schaefer und Laugwitz, durch die erstere Theorie widerlegt, letztere bestätigt wurde. Der Verfasser macht sich auch die von mir eingeführten Bezeichnungen „Hertzeffekt" und „Duboiseffekt" zu eigen, der Hinweis auf die Arbeit fehlt aber. Schließlich werden die Resultate von Dubois und Rubens über die Inversion der Gitterwirkung erwähnt, dabei aber das eigentliche Problem, das für die Theorie noch besteht, gar nicht erwähnt. Die Braunschen Versuche über Hertzsche Gitterwirkung im Sichtbaren werden ebenfalls mit Stillschweigen übergangen, (obwohl sie in einem gewissen Gegensatz zu den Dubois-Rubensschen stehen), ebenso wie die Arbeit von Schaefer und Reiche, die sich damit und mit der Gitterinversion befaßt.

Diese Stichproben erwecken das Gefühl, daß der Artikel im einzelnen die notwendige Zuverlässigkeit vermissen läßt, und in der Tat könnte man in der obigen Weise noch länger fortfahren. Doch soll darüber nicht vergessen werden, daß auch hier die Darstellung klar ist und im ganzen gut orientiert.

C. Schaefer.

M. Abraham, Theorie der Elektrizität. Bd. II. Elektromagnetische Theorie der Strahlung. gr. 8°. 3. Auflage. X. u. 402 S. mit 11 Abbildungen. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1914. Gebunden M. 11.—.

Max Abrahams Theorie der Elektrizität nimmt ohne Zweifel unter den Lehrbüchern der Elektronentheorie eine beherrschende Stellung ein. Wie Abraham wohl als erster in diesem Werk eine umfassende Darstellung des ganzen Gebietes gab, die sich durch Form und Inhalt gleich auszeichnete, so ist er bemüht gewesen, auch die späteren Auflagen nach Möglichkeit den modernen Entwicklungen der Theorie anzupassen. Auch die hier vorliegende dritte Auflage zeigt den früheren gegenüber mehrfach Veränderungen und Erweiterungen.

So ist der Satz vom Impulse des Energiestroms und von der Trägheit der Energie eingehender behandelt und unabhängig vom Relativitätsprinzip aufgestellt worden. Ihm tritt an die Seite der Satz von der Schwere der Energie, der sich auf die Gleichheit der schweren und der trägen Masse stützt, und die Veränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit im Schwerefelde zur Folge hat. Ein tieferes Eingehen auf die modernen Gravitationstheorien war natürlich im Rahmen des vorliegenden Buches unmöglich.

Auch die Elektrodynamik der bewegten Körper hat eine Veränderung erfahren. In den Grundgleichungen treten hier neben den bekannten Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ zwei Hilfsvektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ auf, die die Kräfte darstellen, welche das Feld auf bewegte elektrische und magnetische Einheitspole ausübt. Die verschiedenen Theorien unterscheiden sich dann nur durch die verschiedene Verknüpfungsweise der 4 Vektoren $\mathfrak{D}, \mathfrak{H}, \mathfrak{E}', \mathfrak{H}'$. Die Experimentaluntersuchungen von Eichenwald und Wilson schränken diese Verknüpfungsgleichungen ein und führen so zu den drei möglichen Theorien von H. A. Lorentz, E. Cohn und H. Minkowski, die sich nur in Größen zweiter Ordnung unterscheiden. Allein die Minkowskischen Gleichungen genügen dem Relativitätsprinzip und erfüllen in der von Abraham modifizierten Form den Satz vom Impulse des Energiestroms. So lehrreich an sich dieser historische Entwicklungsgang ist, der die Hertzschen Gleichungen für bewegte Körper auf Grund der Eichenwald-Wilsonschen Untersuchungen verwerfen mußte, dagegen die Entscheidung zwischen den drei genannten Theorien vom Standpunkt der reinen Elektrodynamik aus offen läßt, so sehr ist es andererseits, nach der Meinung des Referenten, zu bedauern, daß der Verfasser nicht die ganze Elektrodynamik bewegter Körper auf den Boden des Relativitätsprinzips gestellt hat. Die Einheitlichkeit und Eindeutigkeit geht so doch etwas verloren, und das Relativitätsprinzip scheint eher ein Anhängsel der Theorie als ein der Elektrodynamik übergeordnetes Prinzip zu sein.

Die hauptsächlichste Neuerung gegenüber der vorigen Auflage besteht in der ausführlichen Darstellung der Theorie des Magnetismus. Besonders ist die eingehende und schöne Bearbeitung des Feldes und der Strahlung des Magnetons mit Freude zu begrüßen. Aus ihr entwickeln sich konsequent die Langevinsche Theorie des Paramagnetismus und die Weißsche Theorie ferromagnetischer Stoffe.

F. Reiche.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der wissenschaftliche Hilfsarbeiter Dr. Erich Kron beim Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam zum Observator, der Privatdozent an der Universität Kiel Dr. Alexander Wilkens zum a.o. Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte an der Universität Prag, der etatsmäßige Professor für Physikalische Chemie an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Hans von Wartenberg zum etatsmäßigen Professor für anorganische Chemie an derselben Hochschule.

Gestorben: Der Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam ord. Honorarprofessor für Astrophysik an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Karl Schwarzschild, der Dozent für Chemie an der Akademie in Posen Professor Dr. Emil Wörner, der ord. Professor der Organischen Chemie an der Sorbonne und dem Collège de France Emil Clément Jungfleisch in Paris, der emer. Professor der analytischen Chemie an der Böhmischen Technischen Hochschule in Prag Hofrat Dr. Karl Preis, der Ingenieur und Inhaber einer Werkstätte für Präzisionsmechanik Martin Bornhäuser in Ilmenau, der a.o. Professor für Chemie an der Universität München Dr. Oskar Piloty (gefallen am 6. Oktober 1915), der a.o. Professor für Mathematik an der Universität Zürich Dr. Adolf Weiler.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

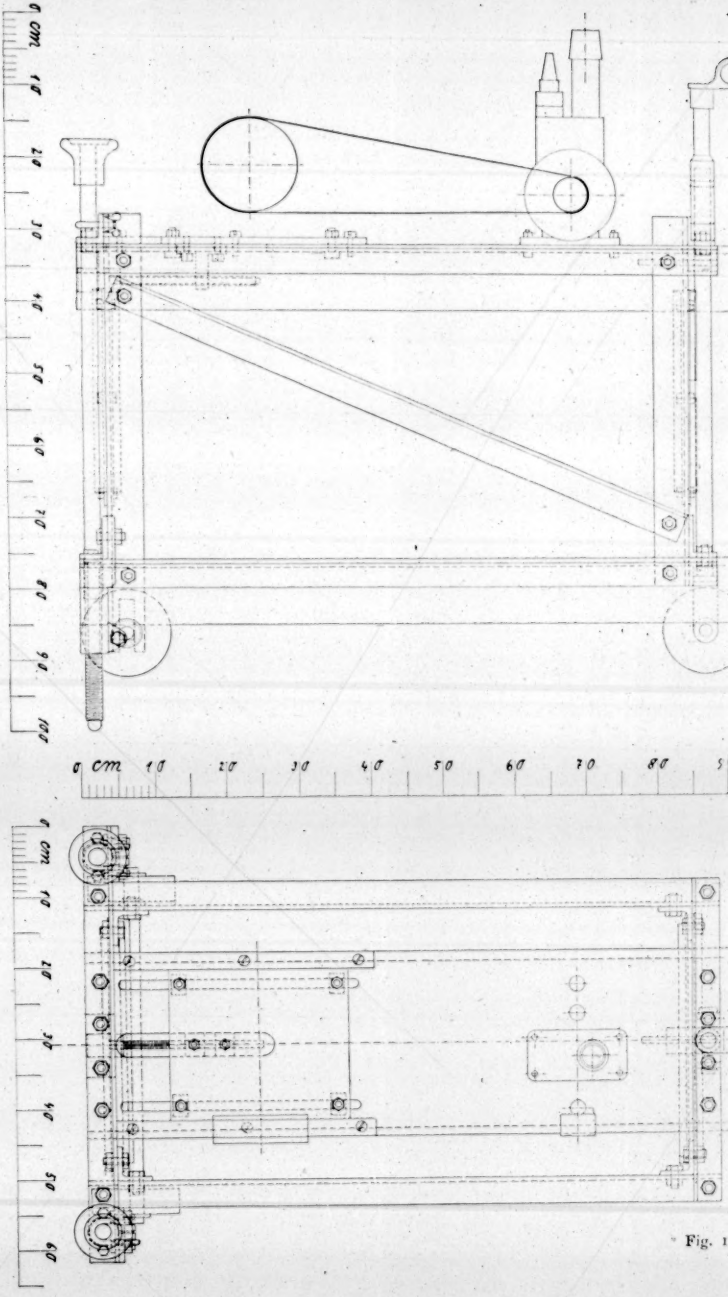
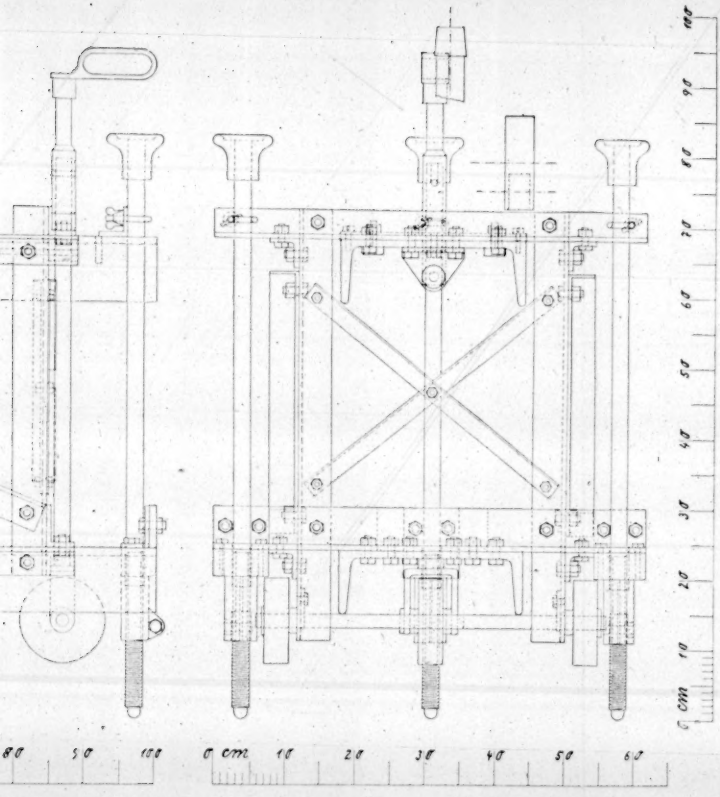


Fig. 1



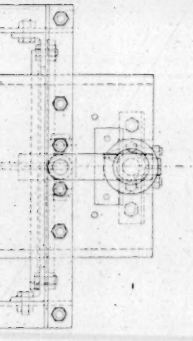


Fig. 1.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.